Bernd Luderer

Mathematische Formeln und Begriffe für Wirtschaftswissenschaftler

Springer Gabler

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die wichtigsten mathematischen Formeln und Begriffe immer zur Hand zu haben – das ist das Anliegen dieses Büchleins im Westentaschenformat. Speziell auf die Bedürfnisse von Studierenden der Wirtschaftswissenschaften und verwandter Richtungen zugeschnitten, ist es überaus nützlich beim Selbststudium, als Nachschlagewerk zum täglichen Gebrauch und in der Klausur. Hier findet man in übersichtlicher Weise alles Wichtige über Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher, inklusive der Differenzialrechnung, zu Extremwertaufgaben sowie zu Vektoren und Matrizen. Aber auch die klassische Finanzmathematik und deren Anwendung in der Wertpapieranalyse werden ausführlich dargestellt. Ein Lehrbuch kann dieser Pocket Guide nicht ersetzen, aber nützlich ist er allemal, wie zahlreiche Zuschriften von Studierenden, Dozenten und Hörern in der beruflichen Weiterbildung zeigen.

Funktionen einer Veränderlichen

Grundbegriffe und Eigenschaften

Eine reelle Funktion f einer unabhängigen Veränderlichen $x \in \mathbb{R}$ ist eine Abbildung (Zuordnungsvorschrift) $y = f(x)$, die jeder Zahl x des Definitionsbereiches D_f genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ zuordnet. Schreibweise: $f\colon D_f \to \mathbb{R}$.

Definitionsber.	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, y \in W_f\colon y = f(x)\}$
Wertebereich	$W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in D_f\colon y = f(x)\}$
Nullstelle	eine Zahl $x_0 \in D_f$ mit $f(x_0) = 0$
Graph einer Funktion	Darstellung der zu f zugeordneten Punkte $(x, y) = (x, f(x))$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (meist mittels eines kartesischen Koordinatensystems)
eineindeutige Funktion	zu jedem $y \in W_f$ gibt es genau ein $x \in D_f$ mit $y = f(x)$
inverse Funkt., Umkehrfunktion	ist f eineindeutig, so ist die Abbildung $y \to x$ mit $y = f(x)$ auch eine eineindeutige Funktion, genannt inverse Funktion zu f; Bezeichnung $f^{-1}\colon W_f \to D_f$, d. h. $x = f^{-1}(y)$

Wachstum und Symmetrie von Funktionen

$x, x_1, x_2 \in I \subset D_f \subseteq \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, seien **beliebige** Punkte.

monoton wachsende Funktion	$f(x_1) \leq f(x_2)$
monoton fallende Funktion	$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton wachsende Funktion	$f(x_1) < f(x_2)$
streng monoton fallende Funktion	$f(x_1) > f(x_2)$
gerade Funktion	$f(-x) = f(x)$
ungerade Funktion	$f(-x) = -f(x)$

Beschränktheit und Extrema von Funktionen

Es gelte $x^*, x \in D_f$.

beschränkte Funktion	$\exists\, K\colon \lvert f(x)\rvert \le K \;\forall\, x$
nach oben beschr. F.	$\exists\, K\colon f(x) \le K \;\forall\, x$
nach unten beschr. F.	$\exists\, K\colon f(x) \ge K \;\forall\, x$
globale Maximumstelle	$x^*\colon\; f(x^*) \ge f(x) \;\forall x$
globales Maximum	$f(x^*) = \max\limits_{x\in D_f} f(x)$
lokale Maximumstelle	$x^*\colon\; f(x^*) \ge f(x) \;\forall x \in U_\varepsilon(x^*)$
globale Minimumstelle	$x^*\colon\; f(x^*) \le f(x) \;\forall x$
globales Minimum	$f(x^*) = \min\limits_{x\in D_f} f(x)$
lokale Minimumstelle	$x^*\colon\; f(x^*) \le f(x) \;\forall x \in U_\varepsilon(x^*)$

ε-Umgebung von x^*: $U_\varepsilon(x^*) = \{x\colon\, \lvert x - x^*\rvert < \varepsilon\},\;\; \varepsilon > 0$

Krümmungseigenschaften

Es seien $x_1, x_2 \in D_f$ **beliebige** Punkte, $\lambda \in (0,1)$.

konvexe Funktion:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

streng konvexe Funktion:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

konkave Funktion:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

streng konkave Funktion

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Bei Konvexität und Konkavität gelten die Ungleichungen auch für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$.

Arten von Funktionen

Lineare Funktionen

lineare Funktion	$y = f(x) = ax$
affin lineare Funktion	$y = f(x) = ax + b$

Eigenschaften linearer Funktionen:

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
$f(\lambda x) = \lambda f(x) \;\forall\; \lambda \in \mathbb{R}$, speziell: $f(0) = 0$

Eigenschaften affin linearer Funktionen:

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = a$, $\quad f(-\frac{b}{a}) = 0,\; a \neq 0;$ $\quad f(0) = b$

Affin lineare Funktionen werden mitunter einfach als lineare Funktionen bezeichnet; ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem ist eine Gerade.

Quadratische Funktionen

$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

Diskriminante: $D = \frac{1}{a^2}(b^2 - 4ac)$

Nullstellen: $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} \pm \sqrt{D}\right)$

Für $D > 0$ gibt es zwei, für $D = 0$ eine (doppelte) und für $D < 0$ keine reelle Nullstelle.

Extremstelle: $x_E = -\frac{b}{2a}$ ($a>0$: Min., $a<0$: Max.)

Speziell: $y = x^2 + px + q$

Diskriminante: $D = \frac{p^2}{4} - q$

Nullstellen: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

Für $a > 0$ ($a < 0$) ist f eine streng konvexe (konkave) Funktion und der Graph von f eine nach oben (unten) geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Potenzfunktionen

Natürlicher Exponent: $y = f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \mathbb{R}^+, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

Für gerades n ist $y = x^n$ eine gerade, für ungerades n eine ungerade Funktion (s. S. 4).

Die Funktion $f(x) = x^0 \equiv 1$ ist eine Konstante.

Reeller Exponent: $y = f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0$

Definitionsbereich: $D_f = \begin{cases} \mathbb{R}^+, & \text{falls } \alpha \geq 0 \\ \{x \mid x > 0\}, & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$

Wertebereich: $W_f = \begin{cases} \mathbb{R}^+, & \text{falls } \alpha \geq 0 \\ \{y \mid y > 0\}, & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$

Für $\alpha = \frac{1}{n}$ wird $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ *Wurzelfunktion* genannt; sie ist (für $x > 0$) die Umkehrfunktion von $f(x) = x^n$.

Wegen $\varepsilon_f(x) = \alpha = \text{const}$ besitzen Potenzfunktionen konstante Elastizität (s. S. 12).

Polynomfunktionen (ganze rationale Funktionen)

$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
($a_i \in \mathbb{R}$ gegebene Koeffizienten, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus 0$)

Fundamentalsatz von Gauß. Jedes Polynom n-ten Grades kann in der Form

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

dargestellt werden (Produktdarstellung). Die Zahlen x_i sind die reellen oder komplexen Nullstellen des Polynoms. Komplexe Nullstellen treten stets paarweise in konjugiert komplexer Form auf.

Eine Polynomfunktion n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen bzw. genau n komplexe Nullstellen (unter Beachtung deren Vielfachheit).

Satz von Descartes. Die Anzahl positiver Nullstellen der Polynomfunktion p_n ist gleich w oder w–2 oder w–4, wobei w die Zahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ist.

Gebrochen rationale Funktionen

$$r(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$a_m \neq 0,\ b_n \neq 0,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$

$m < n$: *echt* gebrochen; $m \geq n$: *unecht* gebrochen

Eine *unecht* gebrochen rationale Funktion kann durch *Polynomdivision* auf die Form

$$r(x) = p(x) + s(x)$$

gebracht werden, wobei $p(x)$ ein Polynom ist (*Asymptote*) und $s(x)$ eine *echt* gebrochen rationale Funktion.

Nullstellen	alle Nullstellen des Zählers, die keine Nullstellen des Nenners sind
Polstellen	alle Nullstellen des Nenners, die keine Nullstellen des Zählers sind und alle gemeinsamen Nullstellen von Zähler und Nenner, deren Vielfachheit im Zähler kleiner als ihre Vielfachheit im Nenner ist
Lücken	alle gemeinsamen Nullstellen von Zähler und Nenner, deren Vielfachheit im Zähler größer oder gleich ihrer Vielfachheit im Nenner ist

Exponentialfunktionen

$y = a^x$	Exponentialfunktion, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; a – Basis, x – Exponent
$y = \mathrm{e}^x = \exp(x)$	Exponentialfunktion zur Basis e

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$
Wertebereich: $W_f = \{y \mid y > 0\}$

Mittels der Transformation $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $a > 0$ können Funktionswerte für negativen (positiven) Exponenten auf Funktionswerte mit positivem (negativem) Exponenten zurückgeführt werden.

Durch die Umformung $a^{-x} = b^x$, $b = \frac{1}{a}$ kann eine Exponentialfunktion mit Basis $a \in (0, 1)$ auf eine solche mit Basis b, $b > 1$, zurückgeführt werden.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$; speziell ist die Umkehrfunktion zu $f(x) = \mathrm{e}^x$ die Funktion $f^{-1}(x) = \ln x$.

Das Wachstum einer Exponentialfunktion mit $a > 1$ ist stärker als das Wachstum jeder Potenzfunktion $y = x^n$.

Logarithmusfunktionen

$y = \log_a x$	Logarithmusfunktion, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$; x – Argument, a – Basis
$\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$	Funktion des natürlichen Logarithmus
$\log_{10} x = \lg x$	Funktion des dekadischen Logarithmus

Definitionsbereich: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
Wertebereich: $W_f = \mathbb{R}$

Durch die Transformation $\log_a x = -\log_b x$ mit $b = \frac{1}{a}$ kann eine Logarithmusfunktion mit Basis $a \in (0, 1)$ auf eine Logarithmusfunktion mit Basis b, $b > 1$, zurückgeführt werden.

Differenzialrechnung

Falls der Grenzwert $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ existiert, heißt die Funktion f *im Punkt* x *differenzierbar*; sie ist dann dort auch stetig. Ist f differenzierbar $\forall\, x \in D_f$, so wird sie *differenzierbar* auf D_f genannt.

Der Grenzwert wird *Differenzialquotient* oder *Ableitung* genannt und mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ bezeichnet (auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $y'(x)$, $f'(x)$). Der Differenzialquotient ist der Anstieg der Tangente an den Graph von f im Punkt $(x, f(x))$.

Differenziationsregeln

	Funktion	Ableitung
Faktorregel	$a \cdot u(x)$	$a \cdot u'(x), \quad a \in \mathbb{R}$
Summenregel	$u(x) \pm v(x)$	$u'(x) \pm v'(x)$
Produktregel	$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
Quotientenregel	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel	$u(z)$, $z = v(x))$	$u'(z) \cdot v'(x)$
Ableitung mittels Umkehrfunktion	$f(x)$	$\frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$
Logarithmische Differenziation	$f(x) \quad (>0)$	$(\ln f(x))' \cdot f(x)$
Implizite Funktion	$y = f(x)$ gegeben als $F(x,y) = 0$	$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

Ableitungen elementarer Funktionen

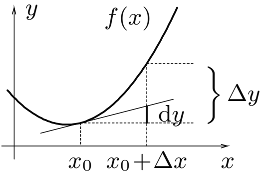
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c=\text{const}$	0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg \mathrm{e}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
x^x	$x^x(\ln x+1)$	$\cot x$	$-1-\cot^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x\ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1-\tanh^2 x$	$\coth x$	$1-\coth^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

Differenzial

Für eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion f gilt

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot \Delta x + \mathrm{o}(\Delta x)$$
$$\text{mit } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{o}(\Delta x)}{\Delta x} = 0;$$

$\mathrm{o}(\cdot)$ – *Landau'sches Symbol*



Der Ausdruck $\mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot \Delta x$ bzw. $\mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$ heißt *Differenzial* der Funktion f im Punkt x_0. Er stellt den Hauptanteil der Funktionswertänderung bei Änderung des Argumentes x_0 um Δx dar: $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Die Größe $\varepsilon_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$ heißt *(Punkt-)Elastizität* von f im Punkt x. Sie gibt näherungsweise an, um wie viel Prozent sich $f(x)$ ändert, wenn sich x um 1 % ändert.

Taylorentwicklung

f heißt *n-mal differenzierbar*, wenn die Ableitungen f', $f'' := (f')'$, $f''' := (f'')'$, $\ldots$, $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ existieren; $f^{(n)}$ wird *n-te Ableitung* oder *Ableitung n-ter Ordnung* von f genannt. Mit $f^{(0)}$ wird f selbst bezeichnet.

Satz von Taylor. Die Funktion f sei $(n+1)$-mal in $U_\varepsilon(x_0)$ differenzierbar; $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Dann gibt es eine zwischen x_0 und x gelegene Zahl ξ, für die gilt

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}}$$

Der letzte Summand (= *Restglied*) gibt den Fehler an, wenn man $f(x)$ durch obige Polynomfunktion n-ten Grades ersetzt.

Springer Gabler springer-gabler.de

Der Erfolgstrainer Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Bernd Luderer

Klausurtraining
Mathematik und Statistik für Wirtschaftswissenschaftler

Aufgaben - Hinweise - Testklausuren - Lösungen - Häufige Fehler
Reihe: Studienbücher Wirtschaftsmathematik

4., erw. Aufl. 2014. XI, 301 S. 49 Abb. Brosch.

€ (D) 32,99 | € (A) 33,91 | *sFr 41,50

ISBN 978-3-658-05545-5

€ (D) sind gebundene Ladenpreise in Deutschland und enthalten 7% MwSt. € (A) sind gebundene Ladenpreise in Österreich und enthalten 10% MwSt. Die mit * gekennzeichneten Preise sind unverbindliche Preisempfehlungen und enthalten die landesübliche MwSt. Preisänderungen und Irrtümer vorbehalten.

Jetzt bestellen: springer-gabler.de

A09696

Eigenschaften von Funktionen (beschrieben mittels Ableitungen)

Monotonie

f sei im Intervall $I = [a, b]$ definiert und differenzierbar.

$f'(x) = 0 \ \forall\, x \in I$	$\Longleftrightarrow$	f konstant auf I
$f'(x) \geq 0 \ \forall\, x \in I$	$\Longleftrightarrow$	f monoton wachsend auf I
$f'(x) \leq 0 \ \forall\, x \in I$	$\Longleftrightarrow$	f monoton fallend auf I
$f'(x) > 0 \ \forall\, x \in I$	$\Longrightarrow$	f streng mon. wachsend auf I
$f'(x) < 0 \ \forall\, x \in I$	$\Longrightarrow$	f streng mon. fallend auf I

Extremaleigenschaften

$f'(\bar{x}) = 0$		notwendig für Extremum in $\bar{x}$
$f'(\bar{x}) = 0 \wedge f''(\bar{x}) > 0$		hinreichend für Minimum in $\bar{x}$
$f'(\bar{x}) = 0 \wedge f''(\bar{x}) < 0$		hinreichend für Maximum in $\bar{x}$
Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a und b, so gilt:		
$f'(a) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum in a
$f'(a) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum in a
$f'(b) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum in b
$f'(b) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum in b

Krümmungseigenschaften

f sei im Intervall $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar.

$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$	$\Longleftrightarrow$ f konvex in I
$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$	$\Longleftrightarrow$ f konkav in I
$f''(x_w) = 0$	notwendig für Wendepunkt
$f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$	hinreichend für Wendepunkt in x_w

Funktionen von mehreren Veränderlichen

Funktionen im Raum $\mathbb{R}^n$

Eine eindeutige Abbildung, die jedem Vektor $\boldsymbol{x} \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ eine reelle Zahl $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zuordnet, wird *reelle Funktion mehrerer reeller Veränderlicher* genannt; Schreibweise: $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$.

$D_f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, y \in \mathbb{R} : y = f(\boldsymbol{x})\}$	Definitionsbereich
$W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, \boldsymbol{x} \in D_f : y = f(\boldsymbol{x})\}$	Wertebereich

Grafische Darstellung

Funktionen $y = f(x_1, x_2)$ zweier unabhängiger Veränderlicher x_1, x_2 lassen sich in einem (x_1, x_2, y)-Koordinatensystem darstellen. Die Menge aller Punkte (x_1, x_2, y) bildet eine *Fläche*, falls die Funktion f stetig ist.

Die Menge der Punkte (x_1, x_2) mit $f(x_1, x_2) = C = \text{const}$ heißt *Höhenlinie* der Funktion f zur Höhe C; diese Linien sind in der x_1, x_2-Ebene gelegen.

Punktmengen des Raumes $\mathbb{R}^n$

Es seien $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ Punkte des Raumes $\mathbb{R}^n$ mit den Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $(y_1, \ldots, y_n)$; diese werden mit den zu ihnen führenden Vektoren $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ bzw. $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ identifiziert.

$\lVert\boldsymbol{x}\rVert_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$	Euklidische Norm von $\boldsymbol{x}$
$\lVert\boldsymbol{x}\rVert_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lvert x_i\rvert$	Betragssummennorm von $\boldsymbol{x}$
$\lVert\boldsymbol{x}\rVert_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \lvert x_i\rvert$	Maximumnorm von $\boldsymbol{x}$

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$	Abstand der Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$
$U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| < \varepsilon\}$	ε-Umgebung des Punktes $\boldsymbol{x}$, $\varepsilon > 0$

Grenzwert und Stetigkeit

Eine *Punktfolge* $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung aus $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}^n$. Die Komponenten des Folgenelementes $\boldsymbol{x}_k$ werden mit $x_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$, bezeichnet.

Konvergenz der Folge $\{\boldsymbol{x}_k\}$ *gegen den Grenzwert* $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| = 0$$

Grenzwert einer Funktion
Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}_0$, wenn für jede gegen $\boldsymbol{x}_0$ konvergente Punktfolge $\{\boldsymbol{x}_k\}$ mit $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{x}_k \in D_f$ die Beziehung $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = a$ gilt. Bezeichnung: $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = a$.

Stetigkeit in einem Punkt
Eine Funktion f wird *stetig im Punkt* $\boldsymbol{x}_0 \in D_f$ genannt, wenn sie in $\boldsymbol{x}_0$ einen Grenzwert besitzt (d. h., wenn für jede gegen $\boldsymbol{x}_0$ konvergierende Punktfolge die Folge zugehöriger Funktionswerte gegen den gleichen Wert konvergiert) und dieser mit dem Funktionswert in $\boldsymbol{x}_0$ übereinstimmt:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}_0) \quad \forall\ \{\boldsymbol{x}_k\}$$

mit $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0$

Sind die Funktionen f und g stetig auf ihren Definitionsbereichen D_f bzw. D_g, so sind die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ stetig auf $D_f \cap D_g$, letztere nur für diejenigen $\boldsymbol{x}$ mit $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Homogene Funktionen

$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha \cdot f(x_1, \ldots, x_n) \quad \forall\, \lambda \geq 0$

f ist homogen vom Grad $\alpha \geq 0$

$\alpha = 1$: f ist linear-homogen
$\alpha > 1$: f ist überlinear-homogen
$\alpha < 1$: f ist unterlinear-homogen

$f(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) = \lambda^{\alpha_i} f(x_1, \ldots, x_n) \ \forall\, \lambda \geq 0$

f ist partiell homogen vom Grad $\alpha_i \geq 0$

Bei linear-homogenen Funktionen bewirkt eine proportionale Veränderung der Variablen eine ebensolche Änderung des Funktionswertes (CES-Funktionen; = **c**onstant **e**lasticity of **s**ubstitution).

Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Vollständige Differenzierbarkeit

Die Funktion $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, heißt *vollständig differenzierbar im Punkt* $\boldsymbol{x}_0$, wenn es einen Vektor $\boldsymbol{g(x_0)}$ gibt, für den gilt: *

$$\lim_{\Delta \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + \Delta \boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \langle\, \boldsymbol{g(x_0)},\, \Delta \boldsymbol{x} \rangle}{\|\Delta \boldsymbol{x}\|} = 0$$

Existiert ein solcher Vektor $\boldsymbol{g(x_0)}$, so ist er eindeutig; er wird *Gradient* genannt und mit $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ bezeichnet. Die Funktion f heißt *differenzierbar* auf D_f, wenn sie in allen Punkten $\boldsymbol{x} \in D_f$ differenzierbar ist.

* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet das Skalarprodukt zweier Vektoren; siehe S. 28.

Partielle Ableitungen

Existiert für die Funktion $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^\top$ der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + \Delta x_i, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\Delta x_i},$$

so heißt er *partielle Ableitung (1. Ordnung)* der Funktion f nach der Variablen x_i im Punkt $\boldsymbol{x}_0$ und wird mit $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$, $f_{x_i}(\boldsymbol{x}_0)$, $\partial_{x_i} f$ oder $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ bezeichnet.

Besitzt die Funktion f in jedem Punkt $\boldsymbol{x} \in D_f$ partielle Ableitungen bezüglich aller Variablen, so wird f *partiell differenzierbar* genannt. Sind alle partiellen Ableitungen stetige Funktionen, heißt f *stetig partiell differenzierbar.*

Beim Bilden der partiellen Ableitung werden alle Variablen, nach denen nicht differenziert wird, als konstant angesehen und die Differenziationsregeln für Funktionen einer Variablen (siehe S. 10f.) angewendet.

Gradient

Ist die Funktion $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, auf D_f stetig partiell differenzierbar, so ist sie dort auch vollständig differenzierbar, wobei der Gradient der aus den partiellen Ableitungen gebildete Spaltenvektor ist:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ist die Funktion f vollständig differenzierbar, so gilt für die *Richtungsableitung* $\boxed{f'(\boldsymbol{x};\boldsymbol{r}) = \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{r})-f(\boldsymbol{x})}{t}}$ (die in diesem Fall für beliebige Richtungen $\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^n$ existiert) die Darstellung $f'(\boldsymbol{x};\boldsymbol{r}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{r}\rangle$; $\nabla f(\boldsymbol{x})$ ist die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $\boldsymbol{x}$.

Der Gradient $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ steht senkrecht auf der Höhenlinie von f zur Höhe $f(\boldsymbol{x}_0)$, so dass (für $n=2$) die Tangente an die Höhenlinie in $\boldsymbol{x}_0$ die Gleichung $\langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\rangle = 0$ besitzt. In Tangentenrichtung bleibt der Funktionswert in linearer Näherung konstant.

Kettenregel

Die Funktionen $x_k = g_k(\boldsymbol{z}) = g_k(z_1,\ldots,z_m)$ seien für $k=1,\ldots,n$ an der Stelle $\boldsymbol{z}$ und die Funktion $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ an der Stelle $\boldsymbol{x}$ vollständig differenzierbar. Ferner gelte $g(\boldsymbol{z}) = (g_1(\boldsymbol{z}),\ldots,g_n(\boldsymbol{z}))$. Dann ist die zusammengesetzte (mittelbare) Funktion $F(z_1,\ldots,z_m) = f(g_1(\boldsymbol{z}),\ldots,g_n(\boldsymbol{z}))$ an der Stelle $\boldsymbol{z}$ vollständig differenzierbar, und es gilt (in komponentenweiser Darstellung):

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{z})}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(\boldsymbol{z}))\cdot\frac{\partial g_k}{\partial z_i}(\boldsymbol{z})$$

Spezialfall $m=1$:

Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ mit $x_k = g_k(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(t))\cdot\frac{\mathrm{d}g_k}{\mathrm{d}t}(t)$$

Spezialfall $m=n=2$:

Funktion $f(x,y)$ mit $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

Höhere partielle Ableitungen

Die partiellen Ableitungen sind selbst wieder Funktionen und besitzen daher ggf. wieder partielle Ableitungen.

Partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)$$

Partielle Ableitungen 3. Ordnung:

$$\frac{\partial^3 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = f_{x_i x_j x_k}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

Hesse-Matrix:

$$H_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{x}) \\ f_{x_2x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_2x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & f_{x_2x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_nx_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit der Differenziationsreihenfolge). Sind die partiellen Ableitungen $f_{x_i x_j}$ und $f_{x_j x_i}$ in einer Umgebung des Punktes $\boldsymbol{x}$ stetig, so gilt $f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) = f_{x_j x_i}(\boldsymbol{x})$; die Hesse-Matrix ist damit symmetrisch.

Vollständiges Differenzial

Vollständiges Differenzial der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}_0$:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \Delta \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \Delta x_k$$

gibt die hauptsächliche Änderung des Funktionswertes bei Änderung der n Komponenten der unabhängigen Variablen um Δx_i, $i = 1, \ldots, n$, an (lineare Approximation)

Falls die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, vollständig differenzierbar an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ ist (► S. 17), so gilt:

$$\Delta f(\boldsymbol{x}_0) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{o}(\|\Delta \boldsymbol{x}\|) \quad \text{mit} \quad \lim_{\Delta \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{\mathrm{o}(\|\Delta \boldsymbol{x}\|)}{\|\Delta \boldsymbol{x}\|} = 0.$$

Partielle Elastizitäten

Ist die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, partiell differenzierbar, so beschreibt die dimensionslose Größe $\varepsilon_{f,x_i}(\boldsymbol{x})$ (*partielle Elastizität*) näherungsweise die relative Änderung des Funktionswertes in Abhängigkeit von der relativen Änderung der i-ten Komponente x_i.

i-te partielle Elastizität der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}$:

$$\varepsilon_{f,x_i}(\boldsymbol{x}) = f_{x_i}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{x_i}{f(\boldsymbol{x})}$$

Euler'sche Homogenitätsrelation (f homogen vom Grad α):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \alpha \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$$

Summe der partiellen Elastizitäten = Homogenitätsgrad:

$$\varepsilon_{f,x_1}(\boldsymbol{x}) + \ldots + \varepsilon_{f,x_n}(\boldsymbol{x}) = \alpha$$

Elastizitätsmatrix der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{f_1,x_1}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \varepsilon_{f_1,x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{f_m,x_1}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \varepsilon_{f_m,x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Die Größen $\varepsilon_{f_i,x_j}(\boldsymbol{x})$ heißen für $i = j$ *direkte Elastizitäten* und für $i \neq j$ *Kreuzelastizitäten*.

Extremwerte ohne Nebenbedingungen

Die Funktion $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, sei hinreichend oft stetig differenzierbar; $\bar{\boldsymbol{x}}$ sei ein innerer Punkt von D_f.

Notwendige Extremwertbedingungen

$\bar{\boldsymbol{x}}$ lok. Extremst.	$\Rightarrow$	$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow f_{x_i}(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0 \ \forall i$
$\bar{\boldsymbol{x}}$ lok. Min.	$\Rightarrow$	$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \wedge H_f(\bar{\boldsymbol{x}})$ pos. semidef.
$\bar{\boldsymbol{x}}$ lok. Max.	$\Rightarrow$	$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \wedge H_f(\bar{\boldsymbol{x}})$ neg. semidef.

Punkte $\bar{\boldsymbol{x}}$ mit $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}$ heißen *stationäre* Punkte von f. Gibt es in jeder Umgebung des stationären Punktes $\bar{\boldsymbol{x}}$ Punkte $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ mit $f(\boldsymbol{x}) < f(\bar{\boldsymbol{x}}) < f(\boldsymbol{y})$, so wird $\bar{\boldsymbol{x}}$ *Sattelpunkt* der Funktion f genannt; dort liegt kein Extremum vor.

Randpunkte von D_f und Nichtdifferenzierbarkeitsstellen von f müssen gesondert untersucht werden (z. B. durch Analyse der Funktionswerte von Punkten, die zu $\bar{\boldsymbol{x}}$ benachbart sind).

Hinreichende Extremwertbedingungen

$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \wedge H_f(\bar{\boldsymbol{x}})$ pos. definit	$\Rightarrow$	$\bar{\boldsymbol{x}}$ lok. Minimumst.
$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \wedge H_f(\bar{\boldsymbol{x}})$ neg. definit	$\Rightarrow$	$\bar{\boldsymbol{x}}$ lok. Maximumst.
$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \wedge H_f(\bar{\boldsymbol{x}})$ nicht definit	$\Rightarrow$	$\bar{\boldsymbol{x}}$ Sattelpunkt
Spezialfall $n = 2$, d. h. $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$:		
$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \wedge \mathcal{A} > 0 \wedge f_{x_1x_1}(\bar{\boldsymbol{x}}) > 0$	$\Rightarrow$	$\bar{\boldsymbol{x}}$ lok. Minimumst.
$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \wedge \mathcal{A} > 0 \wedge f_{x_1x_1}(\bar{\boldsymbol{x}}) < 0$	$\Rightarrow$	$\bar{\boldsymbol{x}}$ lok. Maximumst.
$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \wedge \mathcal{A} < 0$	$\Rightarrow$	$\bar{\boldsymbol{x}}$ Sattelpunkt

Hierbei wurde die Bezeichnung $\mathcal{A} = \det H_f(\bar{\boldsymbol{x}}) = f_{x_1x_1}(\bar{\boldsymbol{x}}) \cdot f_{x_2x_2}(\bar{\boldsymbol{x}}) - [f_{x_1x_2}(\bar{\boldsymbol{x}})]^2$ verwendet. Bei $\mathcal{A} = 0$ kann keine Aussage über die Art des stationären Punktes $\bar{\boldsymbol{x}}$ getroffen werden.

Leicht verständlicher mathematischer Grundkurs mit wirtschaftswissenschaftlichem Bezug

Bernd Luderer, Uwe Würker

Einstieg in die Wirtschaftsmathematik

Reihe: Studienbücher Wirtschaftsmathematik

9., akt. Aufl. 2015. XIV, 463 S. 97 Abb. Brosch.

€ (D) 32,99 | € (A) 33,91 | *sFr 41,50

ISBN 978-3-658-05936-1

€ (D) sind gebundene Ladenpreise in Deutschland und enthalten 7% MwSt. € (A) sind gebundene Ladenpreise in Österreich und enthalten 10% MwSt. Die mit * gekennzeichneten Preise sind unverbindliche Preisempfehlungen und enthalten die landesübliche MwSt. Preisänderungen und Irrtümer vorbehalten.

Extremwerte unter Nebenbedingungen

Gegeben seien die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f, g_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m < n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. Gesucht sind lokale Extremstellen der Extremwertaufgabe

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f(\boldsymbol{x}) & \longrightarrow & \max / \min \\ g_1(\boldsymbol{x}) = 0, & \ldots, & g_m(\boldsymbol{x}) = 0 \end{array}} \tag{G}$$

Menge zulässiger Punkte von (G):

$$G = \{\boldsymbol{x} \in D \mid g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, g_m(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

Es gelte die *Regularitätsbedingung* rang $\boldsymbol{J} = m$, wobei die $(m \times n)$-Matrix $\boldsymbol{J}$ die Jacobi-Matrix bezeichnet, deren Spalten aus den Gradienten der Funktionen g_i bestehen. O.B.d.A. seien die ersten m Spalten von $\boldsymbol{J}$ linear unabhängig.

Eliminationsmethode

1. Löse die Nebenbedingungen $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i=1, \ldots, m$, von (G) nach den Variablen $x_1, \ldots, x_m$ auf (was ggf. durch Umnummerierung erreicht werden kann): $x_i = \widetilde{g}_i(x_{m+1}, \ldots, x_n)$.
2. Setze die Variablen x_i, $i=1, \ldots, m$, in die Funktion f ein: $f(\boldsymbol{x}) = \widetilde{f}(x_{m+1}, \ldots, x_n)$.
3. Bestimme die stationären Punkte (mit $n-m$ Komponenten) von $\widetilde{f}$ und ermittle die Art der Extrema (siehe Bedingungen auf S. 22).
4. Berechne die restlichen m Komponenten $x_1, \ldots, x_m$ gemäß Punkt 1, um stationäre Punkte für (G) zu erhalten.

Alle Aussagen bezüglich der Art der Extrema von $\widetilde{f}$ (Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen) gelten auch für das Problem (G).

Lagrange-Methode

1. Ordne jeder der Nebenbedingungen $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ einen (zunächst unbekannten) *Lagrange-Multiplikator* $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,m$, zu; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)^\top$.
2. Stelle die zu (G) gehörige *Lagrange-Funktion* auf:
$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}).$$
3. Berechne die stationären Punkte $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})$ der Funktion $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$ bezüglich der Veränderlichen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ aus dem (i. Allg. nichtlinearen) Gleichungssystem
$$L_{x_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=0, i=1,\ldots,n;\;\; L_{\lambda_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=0, i=1,\ldots,m.$$
Die Punkte $\bar{\boldsymbol{x}}$ sind dann stationär für (G).
4. Ist die $(n \times n)$-Matrix $\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})$ (x-Anteil der Hesse-Matrix von L) positiv definit über der Menge $T = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{z} = 0,\ i=1,\ldots,m\}$, d. h.
$$\boldsymbol{z}^\top \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})\boldsymbol{z} > 0 \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in T,\ \boldsymbol{z} \neq \mathbf{0},$$
so stellt $\bar{\boldsymbol{x}}$ eine lokale Minimumstelle für (G) dar; bei negativer Definitheit von $\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\lambda}})$ ist $\bar{\boldsymbol{x}}$ eine lokale Maximumstelle.

Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren

Die Extremstelle $\bar{\boldsymbol{x}}$ der (modifizierten) Aufgabe

$$\boxed{f(\boldsymbol{x}) \to \max / \min;\; g_i(\boldsymbol{x}) - b_i = 0,\;\; i=1,\ldots,m} \qquad (\mathrm{G}_{\boldsymbol{b}})$$

für $\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{b}}$ sei eindeutig, und $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ sei der zu $\bar{\boldsymbol{x}}$ gehörige Vektor der Lagrange-Multiplikatoren. Die Regularitätsbedingung rang $\boldsymbol{J} = m$ (siehe S. 24) sei erfüllt, und $f^*(\boldsymbol{b})$ bezeichne den Extremwert der Aufgabe $(\mathrm{G}_{\boldsymbol{b}})$ in Abhängigkeit vom Vektor der rechten Seite $\boldsymbol{b} = (b_1,\ldots,b_m)^\top$. Dann gilt $\dfrac{\partial f^*}{\partial b_i}(\bar{\boldsymbol{b}}) = -\bar{\lambda}_i$, d. h., $-\bar{\lambda}_i$ beschreibt (näherungsweise) den Einfluss der i-ten rechten Seite auf die Veränderung des Optimalwertes der Aufgabe $(\mathrm{G}_{\boldsymbol{b}})$.

Methode der kleinsten Quadratsumme (MKQ)

Gegeben seien die Wertepaare (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$, wobei x_i Mess- oder Zeitpunkte sind (in letzterem Fall meist mit t_i bezeichnet); y_i sind Mess-, Beobachtungs- oder statistische Werte.

Gesucht: Funktion $y = f(x, \boldsymbol{a})$ (*Ansatzfunktion, Trendfunktion*), die die Messwerte „möglichst" gut beschreibt, wobei der Vektor $\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots, a_M)$ die in optimaler Weise zu bestimmenden Parameter der Ansatzfunktion enthält.

Die Größe $[z_i] = \sum\limits_{i=1}^{N} z_i$ heißt *Gauß'sche Klammer.*

Zu minimierende Summe der Fehlerquadrate:
$S = \sum\limits_{i=1}^{N} \left(f(x_i, \boldsymbol{a}) - y_i\right)^2 \longrightarrow \min$
Notw. Minimumbedingungen (Normalgleichungen):
$\sum\limits_{i=1}^{N} \left(f(x_i, \boldsymbol{a}) - y_i\right) \cdot \dfrac{\partial f(x_i, \boldsymbol{a})}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, M$

Die Minimumbedingungen entstehen aus den Beziehungen $\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0$ und sind von der konkreten Form der Ansatzfunktion f abhängig; sie sind unmittelbar übertragbar auf Ansatzfunktionen der Art $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (Funktionen mehrerer Veränderlicher).

Typen von Ansatzfunktionen (Auswahl)

$f(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1 x$	linearer Ansatz
$f(x, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$	quadratischer Ansatz
$f(x, \boldsymbol{a}) = \sum\limits_{j=0}^{M} a_j \cdot g_j(x)$	verallgemeinert linearer Ansatz

In den auf S. 26 genannten Fällen ergibt sich stets ein **lineares Normalgleichungssystem**. Speziell gilt:

Linearer Ansatz

$$\begin{aligned} a_0 \cdot N \quad + a_1 \cdot [x_i] &= [y_i] \\ a_0 \cdot [x_i] + a_1 \cdot [x_i^2] &= [x_i y_i] \end{aligned}$$

Quadratischer Ansatz

$$\begin{aligned} a_0 \cdot N \quad + a_1 \cdot [x_i] \ + a_2 \cdot [x_i^2] &= [y_i] \\ a_0 \cdot [x_i] \ + a_1 \cdot [x_i^2] + a_2 \cdot [x_i^3] &= [x_i y_i] \\ a_0 \cdot [x_i^2] + a_1 \cdot [x_i^3] + a_2 \cdot [x_i^4] &= [x_i^2 y_i] \end{aligned}$$

Explizite Lösung bei linearer Ansatzfunktion

$$a_0 = \frac{[x_i^2] \cdot [y_i] - [x_i y_i] \cdot [x_i]}{N \cdot [x_i^2] - [x_i]^2},$$

$$a_1 = \frac{N \cdot [x_i y_i] - [x_i] \cdot [y_i]}{N \cdot [x_i^2] - [x_i]^2}$$

Mit Hilfe der Transformation $x_i' = x_i - \frac{1}{N}[x_i]$ vereinfacht sich wegen $[x_i'] = 0$ das obige Normalgleichungssystem.

Für den exponentiellen Ansatz $f(x) = a_0 \cdot \mathrm{e}^{a_1 x}$ führt im Falle $f(x) > 0$ die Transformation $T(y) = \ln y$ auf ein lineares Normalgleichungssystem.

Für den Ansatz $f(x) = \frac{a}{1+b\cdot \mathrm{e}^{-cx}}$ (logistische Funktion) kann bei gegebener Sättigungskonstante a die Transformation $y_i' = \ln(\frac{a}{y_i} - 1)$ verwendet werden, um aus einem linearen Normalgleichungssystem Regressionsparameter a_0, a_1 zu bestimmen. Durch die Rücksubstitutionen $b = \mathrm{e}^{a_0}$ und $c = -a_1$ erhält man die gesuchten Trendparameter.

Vektoren und Matrizen

Vektoren

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$	n-dimension. Vektor mit Komponenten a_i
$\boldsymbol{a}^\top = (a_1, \ldots, a_n)$	zu $\boldsymbol{a}$ *transponierter* Vektor
$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Einheits-vektoren

Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist der Raum der n-dimensionalen Vektoren; $\mathbb{R}^1$ – Zahlengerade, $\mathbb{R}^2$ – Ebene, $\mathbb{R}^3$ – Raum.

Rechenoperationen

$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$	Multiplikation mit reeller Zahl λ
$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$	Addition, Subtraktion
$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$	Skalarprodukt
$\lvert \boldsymbol{a} \rvert = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}$	Betrag (Länge) des Vektors $\boldsymbol{a}$

Für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt die Beziehung $\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n \boldsymbol{e}_n$.

Eigenschaften von Skalarprodukt und Betrag

$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$	$\langle \boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle,\ \lambda \in \mathbb{R}$
$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle$	$\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert = \lvert\lambda\rvert \cdot \lvert\boldsymbol{a}\rvert$
$\lvert\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\rvert \leq \lvert\boldsymbol{a}\rvert + \lvert\boldsymbol{b}\rvert$	Dreiecksungleichung
$\lvert\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle\rvert \leq \lvert\boldsymbol{a}\rvert \cdot \lvert\boldsymbol{b}\rvert$	Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Linearkombination von Vektoren

Ist der Vektor $\boldsymbol{b}$ die Summe der mit den Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ multiplizierten Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$, d. h.

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m,$$

so wird $\boldsymbol{b}$ *Linearkombination* der Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ genannt. Gilt ferner $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ sowie $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, so heißt $\boldsymbol{b}$ *konvexe Linearkombination* von $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

Lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit

Die m Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear abhängig*, wenn es solche Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gibt, die nicht alle null sind, dass

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

gilt. Anderenfalls heißen die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ *linear unabhängig*.

Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ist n.

Sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, so bilden sie eine *Basis* des Raumes $\mathbb{R}^n$, d. h., jeder Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n.$$

Matrizen

$(m \times n)$-*Matrix* $\boldsymbol{A}$: rechteckiges Schema aus $m \cdot n$ reellen Zahlen a_{ij} (*Elemente*), $i = 1, \ldots, m$ (Zeilenindex), $j = 1, \ldots, n$ (Spaltenindex): $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$

Der *Zeilenrang* (*Spaltenrang*) von $\boldsymbol{A}$ ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (Spaltenvektoren). Dabei gilt: Zeilenrang = Spaltenrang = rang $(\boldsymbol{A})$.

Rechenoperationen

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$	$a_{ij} = b_{ij}\ \forall\, i, j$	Gleichheit von Matrizen
$\boldsymbol{C} = \lambda \boldsymbol{A}$	$c_{ij} = \lambda a_{ij}$	Multiplik. mit reeller Z.
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}$	$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$	Addition, Subtraktion
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^\top$	$c_{ij} = a_{ji}$	Transponieren (Tausch von Zeilen und Spalten)
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$	$c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{p} a_{is} b_{sj}$	Multiplikation von M.

Voraussetzung: $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ *verkettbar*, d. h., Zahl der Spalten von $\boldsymbol{A}$ = Zahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$; die Produktmatrix $\boldsymbol{AB}$ ist dann vom Typ (m, n).

Falksches Schema

$$\begin{array}{cc}
 & \boldsymbol{B}\ \begin{array}{|ccccc|} \hline b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \\ \hline \end{array} \\
\boldsymbol{A}\ \begin{array}{|ccc|} \hline a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline & \vdots \\ \cdots\cdots\cdots & c_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{p} a_{ir} b_{rj} \\ & \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \\ \hline \end{array}
\end{array}$$

Rechenregeln $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$\boldsymbol{O} = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0 \;\forall\, i,j$ bezeichnet die Nullmatrix

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$	$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$
$\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$	$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^\top=\boldsymbol{A}^\top+\boldsymbol{B}^\top$	$(\boldsymbol{A}^\top)^\top=\boldsymbol{A}$
$(\boldsymbol{AB})^\top=\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$	$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$
$(\lambda\boldsymbol{A})^\top=\lambda\boldsymbol{A}^\top$	$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\lambda(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$

Spezielle quadratische Matrizen

quadratische Matrix	Zeilenzahl = Spaltenzahl
Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$	qu. M. mit $e_{ii}=1$, $e_{ij}=0$, $i\neq j$
Diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$	qu. M. mit $d_{ij}=0$ für $i\neq j$
symmetrische Matrix	quadr. M. mit $\boldsymbol{A}^\top=\boldsymbol{A}$
reguläre Matrix	quadr. M. mit $\det\boldsymbol{A}\neq 0^*$
singuläre Matrix	quadr. M. mit $\det\boldsymbol{A}=0$
zu $\boldsymbol{A}$ inverse Matrix	quadr. M. $\boldsymbol{A}^{-1}$ mit $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$
pos. definite Matrix	symmetrische Matrix mit $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0 \;\;\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$
neg. definite Matrix	symmetrische Matrix mit $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0 \;\;\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$

Eigenschaften regulärer Matrizen

$\boldsymbol{E}^\top=\boldsymbol{E}$	$\det\boldsymbol{E}=1$
$\boldsymbol{E}^{-1}=\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$
$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}^{-1})^\top=(\boldsymbol{A}^\top)^{-1}$
$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$	$\det(\boldsymbol{A}^{-1})=[\det\boldsymbol{A}]^{-1}$

* det $\boldsymbol{A}$ bezeichnet die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ (= Zahl)

Klassische Finanzmathematik

Bezeichnungen

t	–	Zeitpunkt, Zeitraum
K_0	–	Anfangskapital, Barwert, Gegenwartswert
K_t	–	Zeitwert, Endwert
i	–	Zinsrate
q	–	Aufzinsungsfaktor: $q = 1 + i$
n	–	Zahl der Perioden, Zeitpunkt
q^n	–	Aufzinsungsfaktor für n Perioden
m	–	Anzahl an Teilperioden

Lineare Verzinsung

$Z_t = K_0 \cdot i \cdot t$	Zinsbetrag
$K_t = K_0\,(1 + it)$	Endwert, Zeitwert zum Zeitpunkt t
$K_0 = \dfrac{K_t}{1 + i \cdot t}$	Barwert, Zeitwert für $t = 0$
$i = \dfrac{K_n - K_0}{K_0 \cdot t}$	Zinsrate
$t = \dfrac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i}$	Laufzeit
$K_0 = K_t \cdot (1 - it)$	Barwert bei kaufmännischer Diskontierung
$i_{\text{eff}} = \dfrac{i}{1 - it}$	Effektivzinsrate bei kaufmännischer Diskontierung

Beim Kauf von Wertpapieren ggf. anfallende *Stückkosten* werden ebenfalls nach obiger Formel für Z_t berechnet, wobei jedoch die Ermittlung des Zeitraums t gesonderten Vorschriften unterliegt.

Regelmäßige Zahlungen

Bei Einteilung der ursprünglichen Zinsperiode in m Teilperioden der Dauer $\frac{1}{m}$ und regelmäßigen Zahlungen in Höhe r zu Beginn bzw. am Ende jeder Teilperiode (vor- bzw. nachschüssig) entsteht ein Endwert (= *Jahresersatzrate*) von

$R = r\left(m + \frac{m+1}{2} \cdot i\right)$	vorschüssig
$R = r\left(m + \frac{m-1}{2} \cdot i\right)$	nachschüssig
Speziell gilt für $m = 12$ (monatliche Zahlungen):	
$R = r \cdot (12 + 6{,}5i)$	Endwert bei vorschüssigen Zahlungen
$R = r \cdot (12 + 5{,}5i)$	Endwert bei nachschüssigen Zahlungen

Skonto

Als *Skonto* S wird ein Preisnachlass bezeichnet, der bei sofortiger Bezahlung von Waren oder Dienstleistungen gewährt wird, im Gegensatz zur Zahlung ohne Abzug nach (spätestens) der Zeit t.

s	Preisnachlass, Skonto (in Prozent)
t	Zeitdifferenz zwischen Zahlungsziel und Skontofrist als Teil des Jahres, d. h. $0 < t \leq 1$
$S = \frac{s}{100} \cdot K$	Skonto (absolut), abhängig vom Rechnungsbetrag K
$i = \frac{s}{(100 - s)t}$	Effektivzinssatz bei Skontonutzung

Zinsusancen

Bei der Berechnung der Laufzeit t als Teil des Jahres

$$\boxed{t = \frac{\text{Zinstage (Laufzeittage)}}{\text{Tagebasis (Jahreslänge in Tagen)}}}$$

finden verschiedene Zinsmethoden Anwendung.

Berechnungsvorschriften

Es bezeichne T_i Tag, M_i Monat, J_i Jahr des i-ten Datums ($i=1$: Anfangsdatum, $i=2$: Enddatum); $t=t_2-t_1$ beschreibe die tatsächliche Anzahl der Tage zwischen erstem und zweitem Datum; L_i seien die Laufzeittage im „angebrochenen" Jahr i, Tagebasis i = 365 oder 366; $f(T_1) = 0, T_1 \leq 29$, $f(T_1) = 1, T_1 \geq 30$.

Methode	Formel
30E/360	$t = \frac{1}{360}[360 \cdot (J_2-J_1)+30 \cdot (M_2-M_1) +\min\{T_2, 30\}-\min\{T_1, 30\}]$
30/360	$t=\frac{1}{360} \cdot [360(J_2-J_1)+30(M_2-M_1)+T_2 -\min(T_1, 30)-\max(T_2-30, 0)f(T_1)]$
act/360	$t = \frac{t_2 - t_1}{360}$
act/365	$t = \frac{t_2 - t_1}{365}$
act/act	$t=\frac{L_1}{\text{Tagebasis 1}} +J_2-J_1-1+\frac{L_2}{\text{Tagebasis 2}}$ *

* Liegt der Zinszeitraum innerhalb eines Jahres, verbleibt nur der 1. Summand.

Geometrische Verzinsung (Zinseszins)

Werden die Zinsen dem Kapital hinzugefügt und tragen ihrerseits Zinsen, so spricht man von *Zinseszins* (*geometrische Verzinsung*). In der Regel erfolgt der Zinszuschlag am Ende der Periode; die Zinsen beziehen sich in diesem Fall auf das Kapital zu Beginn der Periode.

Grundlegende Formeln (Bezeichnungen ► S. 33)

$K_n = K_0(1+i)^n = K_0 q^n$	Leibniz'sche Endwertformel
$K_0 = \dfrac{K_n}{(1+i)^n} = \dfrac{K_n}{q^n}$	Barwert, Zeitwert für $t = 0$
$i = \left(\sqrt[n]{K_n \,/\, K_0} - 1 \right)$	Zinsrate
$n = \dfrac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$	Laufzeit
$n \approx \dfrac{69}{p}$	Verdoppelung eines Kapitals (Faustformel)
$K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \dots q_n$	Endwert bei wechselnder Verzinsung mit Zinsraten i_j $(q_j = 1 + i_j)$

$$K_t = K_0(1 + it_1)(1 + i)^N (1 + it_2)$$

gemischte (taggenaue) Verzinsung; N – Anzahl ganzer Perioden, t_1, t_2 – Länge der „angebrochenen" Perioden

$$p_r = 100 \cdot \left(\frac{1+i}{1+r} - 1 \right) \approx 100 \cdot (i - r)$$

Realzinsfuß bei Inflations- bzw. Preissteigerungsrate r

Zur Vereinfachung wird in der Finanzmathematik anstelle der Formel der gemischten Verzinsung häufig die Leibniz'sche Endwertformel mit nicht ganzzahligem Exponenten $t = t_1 + N + t_2$ angewendet.

Unterjährige Verzinsung

Erfolgt der Zinszuschlag zum Kapital mehrfach (m-mal) innerhalb einer Zinsperiode in jeweils gleichem Abstand, spricht man von *unterjähriger* Verzinsung.

$i_m = \frac{i}{m}$	relative unterjährige Zinsrate
$K_{n,m} = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}$	Endwert nach n Perioden bei m-maliger unterjähriger Verzinsung
$i_{\text{eff}} = (1 + i_m)^m - 1$	effektive Jahreszinsrate
$p_{\text{eff}} = 100 \cdot i_{\text{eff}}$	Effektivzinssatz
$\widehat{i}_m = \sqrt[m]{1+i} - 1$	äquivalente unterjährige Zinsrate

m-malige unterjährige Verzinsung mit konformer Zinsrate $\widehat{i}_m$ führt auf den gleichen Endwert wie einmalige Verzinsung mit nomineller Zinsrate i; m-malige Verzinsung mit relativer Zinsrate i_m führt auf den (größeren) Endwert, der sich bei einmaliger Verzinsung mit der effektiven Zinsrate i_{eff} ergibt.

Stetige Verzinsung

$K_t = K_0 \mathrm{e}^{it}$	Endwert bei stetiger Verzinsung
$K_0 = K_t \mathrm{e}^{-it}$	Barwert bei stetiger Verzinsung
$\delta = \ln(1+i)$	zu i äquivalente Zinsintensität
$i = \mathrm{e}^{\delta} - 1$	zur Zinsintensität δ äquivalente Zinsrate bei einmaliger Verzinsung

Stetige Verzinsung mit der Zinsrate i führt auf einen höheren Endwert als einmalige Verzinsung mit der gleichen Zinsrate, stetige Verzinsung mit der zu i äquivalenten Zinsintensität δ hingegen auf denselben Endwert.

Rentenrechnung

Unter einer *(Zeit-) Rente* versteht man in gleichen zeitlichen Abständen erfolgende, über einen festen Zeitraum laufende regelmäßige Zahlungen. Der äquivalente Einmalbetrag heißt *Rentenendwert* ($t = n$) bzw. *Rentenbarwert* ($t = 0$). Bei Zahlungen zu Periodenbeginn wird die Rente *vorschüssig* und am Periodenende *nachschüssig* genannt. Eine *ewige* Rente entspricht einer unbegrenzten Zahl von Perioden ($n = \infty$).

Bezeichnungen

i	Zinsrate
n	Dauer; Anzahl der Zahlungsperioden
R	Rate; Höhe der Rentenzahlungen
q	Aufzinsungsfaktor: $q = 1 + i$

Grundformeln der vorschüssigen Rente
(Zinsperiode = Ratenperiode)

$E_n^{\text{vor}} = R \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	Endwert
$B_n^{\text{vor}} = \dfrac{R}{q^{n-1}} \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	Barwert
$B_\infty^{\text{vor}} = \dfrac{R \cdot q}{q - 1}$	Barwert der ewigen Rente
$n = \dfrac{1}{\ln q} \cdot \ln \left(E_n^{\text{vor}} \cdot \dfrac{q-1}{Rq} + 1 \right) = \dfrac{1}{\ln q} \cdot \ln \dfrac{Rq}{Rq - B_n^{\text{vor}}(q-1)}$	Laufzeit
$R = \dfrac{E_n^{\text{vor}}(q-1)}{(q^n - 1)q} = \dfrac{B_n^{\text{vor}}(q-1)q^{n-1}}{(q^n - 1)}$	Rate

Grundformeln der nachschüssigen Rente
(Zinsperiode = Ratenperiode)

$E_n^{\text{nach}} = R \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	Endwert
$B_n^{\text{nach}} = \dfrac{R}{q^n} \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	Barwert
$B_\infty^{\text{nach}} = \dfrac{R}{q - 1}$	Barwert der ewigen Rente
$n = \dfrac{1}{\ln q} \cdot \ln \left(E_n^{\text{nach}} \cdot \dfrac{q-1}{R} + 1 \right) = \dfrac{1}{\ln q} \cdot \ln \dfrac{R}{R - B_n^{\text{nach}}(q-1)}$	Laufzeit
$R = \dfrac{E_n^{\text{nach}}(q-1)}{(q^n - 1)} = \dfrac{B_n^{\text{nach}}(q-1)q^n}{(q^n - 1)}$	Rate

Der Aufzinsungsfaktors q kann aus obigen Gleichungen mittels numerischer Näherungsverfahren ermittelt werden; die Zinsrate beträgt dann $i = q - 1$.

Kombinierte Renten- und Zinszahlungen

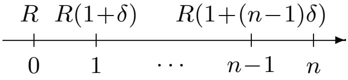
Wird ein Kapital K_0 über n Jahre zinseszinslich angelegt und jedes Jahr eine Rente von R hinzugefügt oder abgehoben, ergeben sich nachstehende Endwerte:

$E_n^{\text{vor}} = K_0 \cdot q^n \pm R \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	vorschüssige Zahlungsweise
$E_n^{\text{nach}} = K_0 \cdot q^n \pm R \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	nachschüssige Zahlungsweise

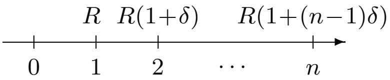
Dynamische Renten

Arithmetisch wachsende dynamische Rente

Zahlungsströme (Zuwächse proportional zur Rate R mit Proportionalitätsfaktor δ):



vorschüssig



nachschüssig

$$E_n^{\text{vor}} = \frac{Rq}{q-1}\left[q^n - 1 + \delta\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right)\right]$$

$$B_n^{\text{vor}} = \frac{R}{q^{n-1}(q-1)}\left[q^n - 1 + \delta\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right)\right]$$

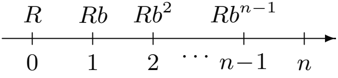
$$E_n^{\text{nach}} = \frac{R}{q-1}\left[q^n - 1 + \delta\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right)\right]$$

$$B_n^{\text{nach}} = \frac{R}{q^n(q-1)}\left[q^n - 1 + \delta\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right)\right]$$

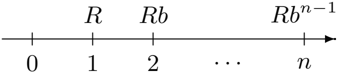
$$B_\infty^{\text{vor}} = \frac{Rq}{q-1}\left(1 + \frac{\delta}{q-1}\right)$$

$$B_\infty^{\text{nach}} = \frac{R}{q-1}\left(1 + \frac{\delta}{q-1}\right)$$

Geometrisch wachsende Renten



vorschüssig



nachschüssig

Der konstante Quotient aufeinander folgender Glieder $b = 1 + \frac{s}{100}$ ist charakterisiert durch die *prozentuale Steigerungsrate* s.

$$
\boxed{
\begin{array}{lcll}
E_n^{\text{vor}} & = & Rq \cdot \dfrac{q^n - b^n}{q - b}, & b \neq q \\[2ex]
E_n^{\text{vor}} & = & Rnq^n, & b = q \\[2ex]
B_n^{\text{vor}} & = & \dfrac{R}{q^{n-1}} \cdot \dfrac{q^n - b^n}{q - b}, & b \neq q \\[2ex]
B_n^{\text{vor}} & = & Rn, & b = q \\[2ex]
E_n^{\text{nach}} & = & R \cdot \dfrac{q^n - b^n}{q - b}, & b \neq q \\[2ex]
E_n^{\text{nach}} & = & Rnq^{n-1}, & b = q \\[2ex]
B_n^{\text{nach}} & = & \dfrac{R}{q^n} \cdot \dfrac{q^n - b^n}{q - b}, & b \neq q \\[2ex]
B_n^{\text{nach}} & = & \dfrac{Rn}{q}, & b = q \\[2ex]
B_\infty^{\text{vor}} & = & \dfrac{Rq}{q - b}, & b < q \\[2ex]
B_\infty^{\text{nach}} & = & \dfrac{R}{q - b}, & b < q
\end{array}
}
$$

Tilgungsrechnung

Eine Schuld S_0 soll nach n Zinsperioden n Rückzahlungen vollständig getilgt sein. Der Rückzahlungsbetrag in der k-ten Periode, die *Annuität* A_k, setzt sich aus dem Tilgungsbetrag T_k und den auf die aktuelle Restschuld S_k zu zahlenden Zinsen Z_k zusammen: $\boxed{A_k = T_k + Z_k}$.

Am gebräuchlichsten sind Rückzahlungspläne mit **nachschüssiger** Tilgung.

Bezeichnungen

n	Anzahl der Rückzahlungsperioden
i	Zinsrate
q	Aufzinsungsfaktor: $q = 1 + i$
S_0	Darlehen, Anfangsschuld
S_k	Restschuld am Ende der k-ten Periode
T_k	Tilgungsbetrag in der k-ten Periode
Z_k	Zinsbetrag in der k-ten Periode
A_k	Annuität in der k-ten Periode

Tilgungsarten

Ratentilgung: Tilgungsraten konstant: $T_k = T = \dfrac{S_0}{n}$, Zinsen fallend

Annuitätentilgung: Annuitäten konstant: $A_k = A = \text{const}$, Zinsen fallend, Tilgungsbeträge steigend

Zinsschuldtilgung: $A_k = S_0 \cdot i, \quad k = 1, \ldots, n-1;$
$A_n = S_0 \cdot (1 + i)$

In einem *Tilgungsplan* werden für jede Periode alle relevanten Größen (Zinsen, Tilgung, Annuität, Restschuld, ggf. Aufgeld) tabellarisch dargestellt.

Ratentilgung (Zinsperiode = Ratenperiode)

$T_k = \dfrac{S_0}{n}$	Tilgungsbetrag in der k-ten Periode
$Z_k = S_0 \cdot \left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right) i$	Zinsbetrag
$A_k = \dfrac{S_0}{n} \cdot \Big[1 + (n-k+1)i\Big]$	Annuität in der k-ten Periode
$S_k = S_0 \cdot \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)$	Restschuld am Ende der k-ten Periode

Annuitätentilgung (Zinsperiode = Ratenperiode)

$A = S_0 \cdot \dfrac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$	Annuität
$S_0 = A \cdot \dfrac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$	Ausgangsschuld
$T_k = T_1 q^{k-1} = (A - S_0 i) q^{k-1}$	Tilgungsbetrag
$S_k = S_0 q^k - A \dfrac{q^k - 1}{q-1} = S_0 - T_1 \dfrac{q^k - 1}{q-1}$	Restschuld
$Z_k = S_0 i - T_1 (q^{k-1} - 1) = A - T_1 q^{k-1}$	Zinsbetrag
$n = \dfrac{1}{\ln q} \Big[\ln A - \ln(A - S_0 i)\Big]$	vollständige Tilgungsdauer

Bei der *Prozentannuität* erfolgt die Festlegung der Annuität durch Angabe des Zinssatzes zuzüglich der prozentualen Tilgung in der ersten Periode.

Kursrechnung

C	Kurs (in Prozent)
K_{nom}	Nominalkapital, -wert
K_{real}	Realkapital, Kurswert
n	(Rest-) Laufzeit
p	Kupon (in Prozent)
$i = p/100$	Nominalzinsrate
i_{eff}	Real- oder Effektivzinsrate, Rendite
$a = C - 100$	Agio (Aufgeld) bei Über-pari-Kurs
$d = 100 - C$	Disagio (Abschlag) bei Unter-pari-Kurs
$q=1+i,\ q_{\text{eff}}=1+i_{\text{eff}}$	Aufzinsungsfaktoren

Durch den Kurs werden Wertpapiere am Markt bewertet. Bei höherer Marktzinsrate i_{eff} sinkt der Kurs und umgekehrt.

Kursformeln

$C = 100 \cdot \dfrac{K_{\text{real}}}{K_{\text{nom}}}$	Kurs als Quotient aus Real- u. Nominalkapital
$C = 100 \,/\, q_{\text{eff}}^n$	Kurs eines Zerobonds
$C = \dfrac{1}{q_{\text{eff}}^n} \left(p \cdot \dfrac{q_{\text{eff}}^n - 1}{q_{\text{eff}} - 1} + 100 \right)$	Kurs einer Anleihe

Bei gegebenem Kurs kann die Rendite aus obigen Gleichungen mittels numerischer Näherungsverfahren berechnet werden.

Approximation der Anleiherendite

$p_c = 100 \cdot \dfrac{i}{C}$	laufende Verzinsung (current yield)
$p_s = \dfrac{100}{C}\left(p - \dfrac{a}{n}\right)$	einfache Verzinsung (simple yield-to-maturity); näherungsweise Rendite einer Zinsschuld bei Über-Pari- Kurs
$p_s = \dfrac{100}{C}\left(p + \dfrac{d}{n}\right)$	einfache Verzinsung bei Unter-Pari-Kurs

Renditeberechnung mittels Barwertvergleich

Zur Berechnung der Rendite (*Effektivzinssatz*) einer Zahlungsvereinbarung, Geldanlage etc. dient das *Äquivalenzprinzip*, bei dem – jeweils bezogen auf einen festen Zeitpunkt t – die Leistungen des Gläubigers den Leistungen des Schuldners oder auch die Zahlungen bei einer Zahlungsweise denen bei einer anderen Zahlungsweise gegenübergestellt werden. Gilt dabei $t = 0$, spricht man vom *Barwertvergleich*.

Die Rendite / der Effektivzinssatz weicht dann vom vereinbarten Nominalzinssatz ab, wenn Gebühren, Aufgelder, zeitliche Verschiebungen der Zahlungen, nicht vollständige Auszahlungen von Darlehen (*Disagio*), inkorrekte Verrechnung von Zinsen etc. auftreten.

In vielen Fällen führt die Berechnung der Rendite i_{eff} bzw. $q_{\text{eff}} = 1 + i_{\text{eff}}$ auf eine Polynomgleichung höheren Grades, die nur näherungsweise mittels numerischer Verfahren gelöst werden kann.

Investitionsrechnung

Die mehrperiodige Investitionsrechnung liefert Methoden und Modelle zur Beurteilung der Wirtschaftlichkeit von Investitionen.

Bezeichnungen

E_k, A_k	Einnahme (Ausgabe) zum Zeitpunkt k
C_k	Einnahmeüberschuss zum Zeitpunkt k
K_E, K_A	Kapitalwert der Einnahmen (Ausgaben)
C	Kapitalwert der Investition
n	Anzahl der Perioden
i, q	Kalkulationszinsrate, Aufzinsungsfaktor

Kapitalwertmethode

$K_E = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{E_k}{q^k}$	Kapitalwert der Einnahmen
$K_A = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A_k}{q^k}$	Kapitalwert der Ausgaben
$C = K_E - K_A = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_k}{q^k}$	Kapitalwert der Einnahmeüberschüsse

Bei $C = 0$ entspricht die Investition der gegebenen Kalkulationszinsrate i, bei $C > 0$ ist ihre Rendite höher. Stehen mehrere Investitionen zur Auswahl, wird die mit dem höchsten Kapitalwert ausgewählt.

Methode des internen Zinsfußes

Der *interne Zinsfuß* p_{int} ist diejenige Größe, bei der der Kapitalwert der Investition gleich null ist: $C = 0$. Näherungsweise gilt $\boxed{p_{\text{int}} \approx p_1 - C_1 \cdot (p_2 - p_1) \,/\, (C_2 - C_1),}$ wobei p_1 und p_2 zwei Zinsfüße sind, deren zugehörige Kapitalwerte C_1 und C_2 verschiedenes Vorzeichen haben. Diese Näherung überschätzt den wahren Wert p_{int}.

Abschreibungen

Abschreibungen beschreiben die Wertminderung von Anlagegütern. Die Differenz aus Anfangswert und Abschreibungen ergibt den *Buchwert*.

n	Nutzungsdauer (in Jahren)
$A = R_0$	Anfangswert
w_k	Wertminderung im k-ten Jahr
R_k	Buchwert nach k Jahren
$W = A - R_n$	gesamte Wertminderung (Abschreibung)
s	Abschreibungsprozentsatz (in Prozent)

Lineare Abschreibung

$w_k = w = \dfrac{A - R_n}{n}$	jährliche Abschreibung
$R_k = A - k \cdot w$	Buchwert nach k Jahren

Geometrisch-degressive Abschreibung

$R_k = A \cdot \left(1 - \dfrac{s}{100}\right)^k$	Buchwert nach k Jahren
$s = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[n]{\dfrac{R_n}{A}}\right)$	Abschreibungsprozentsatz
$w_k = A \cdot \dfrac{s}{100} \cdot \left(1 - \dfrac{s}{100}\right)^{k-1}$	Abschreibung im k-ten Jahr

Übergang degressive → lineare Abschreibung

Um möglichst früh hohe Beträge abzuschreiben, ist es (für $R_n = 0$) zweckmäßig, die Abschreibungen bis zum Jahr $\lfloor k \rfloor$ geometrisch-degressiv, danach linear vorzunehmen, wobei $k = n + 1 - \frac{100}{s}$ ist und $\lfloor k \rfloor$ Abrundung der Zahl k bedeutet.

Kostenbestandteile laut Preisangabenverordnung

Bei der Berechnung von Effektivzinssätzen (Renditen) sind die folgenden gesetzlichen Vorschriften zu beachten:

Einzubeziehen sind:

- Nominalzins
- Zinssollstellungstermine
- Tilgungshöhe
- tilgungsfreie Zeiträume
- Disagio und Agio
- Bearbeitungsgebühr und Verwaltungsbeiträge
- Maklerprovision und sonstige Kreditvermittlungskosten
- Zahlungstermine entsprechend individuellem Angebot bzw. Vereinbarung
- Annuitäten-Zuschussdarlehen, sofern sie mit dem Kredit eine Einheit bilden
- Zusatzdarlehen, zur Finanzierung eines Disagios oder Agios u.ä., sofern sie mit dem Kredit eine Einheit bilden
- von den Zahlungsterminen abweichende Tilgungsverrechnungstermine
- Höhe der Restschuld
- Kosten einer Restschuldversicherung, die der Kreditgeber zwingend als Bedingung für den Kredit vorschreibt,
- Inkassokosten

Nicht einzubeziehen sind:

Bereitstellungszinsen und Teilzahlungszinsaufschläge; Kontoführungsgebühren im marktüblichen Umfang; Aufwendungen, die im Zusammenhang mit der Absicherung des Darlehens individuell unterschiedlich anfallen (Notariatsgebühren, Grundbuchkosten, Schätzgebühren, ...) u. a.

Effektivzinsberechnung laut neuer PAngV

In der Preisangabenverordnung vom 28.7.2000 (Neufassung; BGBl I S. 1244) wird in § 6 sowie im Anhang die Vorgehensweise zur Ermittlung des (anfänglichen) effektiven Jahreszinssatzes von Krediten vorgeschrieben.

m	Anzahl der Einzelzahlungen des Darlehens
n	Anzahl der Tilgungszahlungen (inklusive Zahlungen von Kosten)
t_k	der in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückte Zeitabstand zwischen dem Zeitpunkt der ersten Darlehensauszahlung und dem Zeitpunkt der Darlehensauszahlung mit der Nummer k, $k = 1, \dots, m$; $t_1 = 0$
t'_j	der in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückte Zeitabstand zwischen dem Zeitpunkt der ersten Darlehensauszahlung und dem Zeitpunkt der Tilgungszahlung oder Zahlung von Kosten mit der Nummer j, $j = 1, \dots, n$
A_k	Auszahlungsbetrag des Darlehens mit der Nummer k, $k = 1, \dots, m$
A'_j	Betrag der Tilgungszahlung oder einer Zahlung von Kosten mit der Nummer j, $j = 1, \dots, n$

Ansatz zur Berechnung der effektiven Jahreszinsrate i (Äquivalenzprinzip):

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A'_j}{(1+i)^{t'_j}}\,.$$

Die von Kreditgeber und Kreditnehmer zu unterschiedlichen Zeitpunkten gezahlten Beträge sind nicht notwendigerweise gleich groß und werden nicht notwendigerweise in gleichen Zeitabständen entrichtet.

Anfangszeitpunkt ist der Tag der ersten Darlehensauszahlung ($t_1 = 0$).

Die Zeiträume t_k und t'_j werden in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückt. Zugrunde gelegt werden für das Jahr 365 Tage, 52 Wochen oder 12 gleichlange Monate, wobei für letztere eine Länge von $365/12 = 30{,}41\overline{6}$ Tagen angenommen wird.

Der Vomhundertsatz ist auf zwei Dezimalstellen genau anzugeben; die zweite Dezimalstelle wird aufgerundet, wenn die folgende Ziffer größer oder gleich 5 ist.

Der effektive Zinssatz wird entweder algebraisch oder mit numerischen Näherungsverfahren berechnet.

Beispiel 1

Die Darlehenssumme beträgt 1 000 €, jedoch behält der Darlehensgeber 50 € für Kreditwürdigkeitsprüfungs- und Bearbeitungskosten ein, so dass sich der Auzahlungsbetrag auf 950 € beläuft. Die Rückzahlung der 1 200 € erfolgt 1,5 Jahre nach Darlehensauszahlung:

$$950 = \frac{1200}{(1+i)^{\frac{547,5}{365}}} = \frac{1200}{(1+i)^{\frac{18}{12}}} = \frac{1200}{(1+i)^{\frac{78}{52}}}$$

Algebraische Lösung: $i = \left(\frac{1200}{950}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \approx 16,85\,\%$

Beispiel 2

Die Darlehenssumme beträgt 1 000 €. Der Darlehensnehmer hat folgende Raten zurückzuzahlen: nach 3 Monaten (0,25 Jahre bzw. 13 Wochen bzw. 91,25 Tage) 272 €, nach 6 Monaten 272 €, nach 12 Monaten 544 €:

$$1000 = \frac{272}{(1+i)^{\frac{3}{12}}} + \frac{272}{(1+i)^{\frac{6}{12}}} + \frac{544}{(1+i)^{\frac{12}{12}}}$$

Numerische Lösung: $i = 0,13185\ldots \approx 13,19\,\%$

Wertpapieranalyse

Bezeichungen

n	Anzahl ganzer Kuponperioden
m	Anzahl der Kupontermine pro Jahr
τ	Zeitraum bis zum nächsten Kupontermin als Teil der Kuponperiode
S	Stückzinsen: $S = \frac{p}{m} \cdot (1-\tau)$
P_N	Nettopreis, Kurs, clean price
P_B	Bruttopreis, dirty price: $P_B = P_N + S$
p	Nominalzinssatz, Jahreskupon
R_{n+1}	Tilgungskurs für die endfällige Tilgung
i_m	Rendite, bezogen auf Kuponperiode
i	Jahresrendite

Renditen von Anleihen mit endfälliger Tilgung

ISMA (AIBD)-Methode:

$$P_B = \frac{1}{(1+i_m)^{n+\tau}} \left[\frac{p}{m} \cdot \frac{(1+i_m)^{n+1}-1}{i_m} + R_{n+1} \right],$$

$$i = (1+i_m)^m - 1$$

Moosmüller-Methode:

$$P_B = \frac{1}{(1+i_m)^n(1+i_m\tau)} \left[\frac{p}{m} \cdot \frac{(1+i_m)^{n+1}-1}{i_m} + R_{n+1} \right],$$

$$i = (1+i_m)^m - 1$$

Amerikanische Methode:

$$P_B = \frac{1}{(1+i_m)^n(1+i_m\tau)} \left[\frac{p}{m} \cdot \frac{(1+i_m)^{n+1}-1}{i_m} + R_{n+1} \right],$$

$$i = i_m \cdot m$$

Bewertung von Aktien

(jeweils unmittelbar nach Dividendenzahlung)

P_k	Aktienkurs (Preis) am Ende von Periode k
D_k	Dividende am Ende von Periode k
P	(heutiger) Kurs der Aktie

Periodenrenditen

$i_k = \dfrac{P_k + D_k}{P_{k-1}} - 1$	Anlagerendite in Periode $[k-1, k]$
$i_{k,D} = \dfrac{D_k}{P_{k-1}}$	Dividendenrendite in $[k-1, k]$
$i = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} (1+i_k)} - 1$	Anlagerendite im Zeitraum $[0, n]$
$i_k^* = \ln \dfrac{P_k + D_k}{P_{k-1}} = \ln(1 + i_k)$	stetige Anlagerendite in Periode $[k-1, k]$
$i^* = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} i_k^*$	stetige Anlagerendite in $[0, n]$

Schätzung von Aktienkursen

Der Wert einer Aktie ist gleich dem Barwert ihrer zukünftigen Dividenden (Dividendendiskontierungsmodell).

$P = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{D_k}{q^k}$	Preis als Barwert künftiger Dividendenzahlungen
$P = \dfrac{D_1}{i - w}$	Preis bei geometrisch wachsender Dividende: $D_k = D_1 \cdot (1 + w)^{k-1}$ mit $w < i$ (*Gordon-Modell*)

Risikokennzahlen festverzinslicher Wertpapiere

Risikokennzahlen geben näherungsweise an, wie sich der Barwert eines Zahlungsstroms $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ bei (kleinen) Änderungen von Einflussgrößen, insbesondere der Marktzinsrate i und der Restlaufzeit T, verändert.

Barwertänderung eines Zahlungsstroms bei Änderung der Marktzinsrate

$$P(i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{(1+i)^k}$$

Barwert des Zahlungsstroms (als Funktion von i)

$$\Delta P = P(i+\Delta i) - P(i)$$

exakte Barwertänderung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P &= \frac{\partial P}{\partial i} \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial i^2} \cdot (\Delta i)^2 \\ &= \frac{1}{1+i} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{-kZ_k}{(1+i)^k} + \frac{1}{2(1+i)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)Z_k}{(1+i)^k} \end{aligned}$$

Taylorapproximation der Barwertänderung: $\mathrm{d}P \approx \Delta P$

Zinsabhängige Risikokennzahlen

$$BPW = \frac{-1}{1+i} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot Z_k}{(1+i)^k} \cdot \frac{1}{10000}$$

Basispunktwert; absolute (ungefähre) Barwertänderung bei Renditeänderung um einen Basispunkt

$$D_{\mathrm{mod}} = \frac{1}{1+i} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot Z_k}{P(1+i)^k}$$

modifizierte Duration; prozentuale Barwertänderung bei Zinsänderung um 100 Basispunkte (= 1 % absolut)

$D = \frac{1}{P} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot Z_k}{(1+i)^k}$	Duration
$C = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)Z_k}{(1+i)^k}$	Konvexität; Krümmungsmaß

Laufzeitabhängige Risikokennzahlen

$$\Theta = \frac{P}{360} \cdot \ln(1+i) \approx \left[(1+i)^{\frac{1}{360}} - 1\right] \cdot P \approx \frac{i}{360} \cdot P$$

Theta; absolute Änderung des Barwertes bei Restlaufzeitverkürzung um einen Tag

Eigenschaften der Duration

Die Duration kann interpretiert werden als:

– barwertgewichtete mittlere Restlaufzeit der Zahlungen eines Zahlungsstroms,

– Maß für die durchschnittliche Bindungsdauer einer Kapitalanlage,

– Zeitpunkt, in welchem die Barwerte des Zahlungsstroms im Gleichgewicht sind (Schwerpunkt der „Barwertmassen"),

– Zeitpunkt, zu dem sich eine Anleihe **selbst immunisiert**, d. h. unempfindlich gegenüber Marktzinsänderungen ist; in $t = D$ erfolgt eine Kompensation von Kursrisiken bzw. -chancen durch Wiederanlagechancen bzw. -risiken, denn: Ist $K_D(i)$ der Zeitwert einer Geldanlage bei Verzinsung mit Zinsrate i zum Zeitpunkt $t = D$, wobei D für i_0 berechnet wurde, so gilt $K_D(i) \geq K_D(i_0)\ \forall i$, so dass sich eine Zinsänderung nicht negativ auf den Zeitwert auswirkt. (Annahme: Renditeänderung erfolgt unmittelbar nach Bewertungszeitpunkt.)

Zinsstrukturkurve, Spot Rates, Forward Rates

Zinssätze sind meist laufzeitabhängig; daher führt die Nutzung einer *Zinsstrukturkurve* zu genaueren Bewertungen. Bei *normaler (inverser)* Zinsstruktur sind langfristige Zinssätze höher (niedriger) als kurzfristige.

Bezeichnungen

s_a	Spot Rate, Zerozinssatz; Zinsrate für $[0, a]$
$f_{a,b}$	Forward Rate; (in $t = 0$ ermittelte) Zinsrate für Zeitraum von a bis b
$d_{a,b}$	Diskontfaktor, der eine Zahlung in $t = b$ auf $t = a$ abzinst; speziell: $d_a = d_{0,a}$
$\tau = b - a$	Forward-Laufzeit

Abhängig von den verwendeten Usancen gilt $d_t = \frac{1}{1+s_t \cdot t}$, $d_t = \frac{1}{(1+s_t)^t}$ oder $d_t = \mathrm{e}^{-s_t \cdot t}$. Mitunter werden die (spezielleren) Größen $f_{k,k+1}$ als Forward Rates bezeichnet.

Spot Rates und Forward Rates

Beziehung zwischen Diskontfaktoren*: $d_a \cdot d_{a,b} = d_b$

Kapitalmarkt: $$f_{a,b} = \sqrt[\tau]{\frac{(1+s_b)^b}{(1+s_a)^a}} - 1 = \sqrt[\tau]{\frac{d_a}{d_b}} - 1$$

speziell: $$f_{k,k+1} = \frac{(1+s_{k+1})^{k+1}}{(1+s_k)^k} - 1, \quad f_{0,1} = s_1$$

Geldmarkt: $$f_{a,b} = \left(\frac{1+s_b\, b}{1+s_a\, a} - 1\right) \cdot \frac{1}{\tau} = \left(\frac{d_a}{d_b} - 1\right) \cdot \frac{1}{\tau}$$

* Auch Mischformen zwischen linearen, geometrischen und stetigen Diskontfaktoren sind möglich.

Bei der Festlegung der Laufzeiten a und b sind die jeweiligen Usancen zu berücksichtigen.

Bewertung von Aktienoptionen (European Style)

Optionen sind bedingte Termingeschäfte. Der Käufer einer Option hat das Recht, aber nicht die Pflicht, zum *Verfallstermin* die Option auszuüben. Der Verkäufer muss die Entscheidung des Käufers akzeptieren. Man unterscheidet zwischen *Kaufoptionen (Calls)* und *Verkaufsoptionen (Puts)*.

Bezeichnungen

$P_{\text{Call}}, P_{\text{Put}}$	Preis einer Call- bzw. Put-Option
P_{Aktie}	Kurs der Aktie in $t=0$ (Kassakurs)
S	Basispreis, Strike
i	kontinuierlich verzinste risikolose Zinsrate
T	Restlaufzeit der Option
σ	Standardabweichung der Aktienrendite, Volatilität (Annahme: $\sigma=$const)
Φ	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung
$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$	Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung

Der Käufer eines Calls (Puts) auf eine Aktie erwirbt für den Preis P_{Call} (bzw. P_{Put}) das Recht, nach Ablauf der Zeit T die Aktie zum *Basispreis (Strike)* S zu kaufen (verkaufen).

Mit $W=P_{\text{Aktie}}-S$ gilt: Für $W>0$ ist der Call *im Geld (in the money)*, für $W\approx 0$ ist er *am Geld (at the money)* und für $W<0$ ist er *aus dem Geld (out of the money)*.

Der Put ist *im Geld*, falls $W<0$, *am Geld*, falls $W\approx 0$ und *aus dem Geld*, falls $W>0$.

Bewertung nach Black-Scholes

$$P_{\text{Call}} = P_{\text{Aktie}} \cdot \Phi(d_1) - S \cdot \mathrm{e}^{-iT} \cdot \Phi(d_2)$$

Preis einer Call-Option

$$P_{\text{Put}} = S \cdot \mathrm{e}^{-iT} \cdot \Phi(-d_2) - P_{\text{Aktie}} \cdot \Phi(-d_1)$$

Preis einer Put-Option

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + T\left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right], \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Put-Call-Parität

$$P_{\text{Put}} + P_{\text{Aktie}} = P_{\text{Call}} + \mathrm{e}^{-iT} \cdot S$$

Risikokennzahlen von Aktiencalls

$$\Delta = \frac{\partial P_{\text{Call}}}{\partial P_{\text{Aktie}}} = \Phi(d_1) > 0$$

Delta; Sensitivität der Option in Bezug auf den Aktienpreis

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P_{\text{Call}}}{\partial P^2_{\text{Aktie}}} = \frac{\varphi(d_1)}{P_{\text{Aktie}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} > 0$$

Gamma; Veränderung von Delta; zweite partielle Ableitung des Callpreises nach dem Aktienkurs; gibt an, wie schnell sich Delta ändert

$$\Theta = \frac{\partial P_{\text{Call}}}{\partial T} = \frac{P_{\text{Aktie}} \cdot \sigma \cdot \varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} + iS\mathrm{e}^{-iT}\Phi(d_2) > 0$$

Theta; misst die Sensitivität einer Call-Option in Bezug auf die Restlaufzeit; partielle Ableitung von P_{Call} nach der Laufzeit T

Griechisches Alphabet

Name	Kleinbuchstabe	Großbuchstabe
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ, ε	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ, ϑ	Θ
Jota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omikron	o	O
Pi	π, ϖ	Π
Rho	ρ, ϱ	P
Sigma	σ, ς	Σ
Tau	τ	T
Ypsilon	υ	Υ
Phi	ϕ, φ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Sachwortverzeichnis

Notizen

Das Wichtigste immer dabei! Diese Formelsammlung Mathematik bietet Studierenden der Wirtschaftswissenschaften und verwandter Fächer die wichtigsten Formeln für den täglichen Gebrauch im praktischen Westentaschenformat.

Der Autor

Prof. Dr. Bernd Luderer, TU Chemnitz

► **springer-gabler.de**

KNO-Nr. A08714