Bernd Luderer

Mathematische Formeln und Begriffe für Ingenieure

Springer Vieweg


Wenn Sie
hoch hinaus
wollen...
... starten Sie jetzt durch in unseren Bereichen Bau, Facility Management, Logistik, Immobilien oder Technischer Einkauf.
Wir suchen Ingenieure!
karriere-bei-lidl.de
LIDL

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die wichtigsten mathematischen Formeln und Begriffe immer zur Hand zu haben – das ist das Anliegen dieses Büchleins im Westentaschenformat. Speziell auf die Bedürfnisse von Studierenden der Ingenieurwissenschaften und verwandter Richtungen zugeschnitten, ist es überaus nützlich beim Selbststudium, als Nachschlagewerk zum täglichen Gebrauch und in der Klausur. Hier findet man in übersichtlicher Weise alles Wichtige über komplexe Zahlen, Eigenschaften zahlreicher Funktionen, Differenzial- und Integralrechnung, einschließlich Doppel- und Dreifachintegrale, sowie zu gewöhnlichen Differenzialgleichungen. Ein Lehrbuch kann dieser Pocket Guide nicht ersetzen, aber nützlich ist er allemal, wie zahlreiche Zuschriften von Studierenden und Dozenten und Hörern in der beruflichen Weiterbildung zeigen.

Komplexe Zahlen

i: $\quad \mathrm{i}^2 = -1$	imaginäre Einheit
$z = a + b\,\mathrm{i}, \quad a, b \in \mathbb{R}$	kartesische Form der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$
$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ $= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$	trigonom. Form der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ (Euler'sche Relation)
$\varphi = \arg z$	Argument von z; Winkel zwischen reeller Achse und z
$\operatorname{Re} z = a = r\cos\varphi$	Realteil von z
$\operatorname{Im} z = b = r\sin\varphi$	Imaginärteil von z
$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2} = r$	Betrag von z
$\overline{z} = a - b\,\mathrm{i}$	zu $z = a + b\,\mathrm{i}$ konjugiert komplexe Zahl
$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,\mathrm{i} \quad (a > 0)$	imaginäre Zahl

Spezielle komplexe Zahlen

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$	$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = -1$
$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \pm\mathrm{i}$	$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 \pm \mathrm{i})$
$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$	$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} \pm \mathrm{i}\right)$

$$\mathrm{i}^{4n} = 1, \quad \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2} = -1, \quad \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Umrechnung kartesische Form $\longrightarrow$ Polarform

Gegeben a, b $\quad\Longrightarrow\quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\quad \varphi$ ist Lösung der Gleichungen $\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}$

Umrechnung Polarform $\longrightarrow$ kartesische Form

Gegeben r, φ $\quad\Longrightarrow\quad a = r \cdot \cos\varphi, \qquad b = r \cdot \sin\varphi$

Rechenregeln für komplexe Zahlen

$z_k = a_k + b_k\,\mathrm{i} = r_k(\cos\varphi_k + \mathrm{i}\sin\varphi_k) = r_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k},\ k = 1, 2$

Addition und Subtraktion

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\,\mathrm{i}$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,\mathrm{i} \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \\ &= r_1 r_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\,\mathrm{i}}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \\ &= \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (a_2^2 + b_2^2 > 0) \end{aligned}$$

Potenzieren (Satz von Moivre)

$$\begin{aligned} z^n &= [r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi]^n = r^n[\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)] \\ &= r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\varphi)} \qquad (n \text{ reell}) \end{aligned}$$

Radizieren

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \\ &= \sqrt[n]{r}\left[\cos\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Die n Lösungen liegen auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt[n]{r}$ und bilden mit der reellen Achse die Winkel $\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Speziell gilt: $\quad z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Folgen und Reihen

Zahlenfolge $\{a_n\},\ a_n = f(n) \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

Grenzwert $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon\ \forall\, n \geq n(\varepsilon)$;
$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

arithmetische Folge $a_{n+1} - a_n = d = \text{const}\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

geometrische Folge $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q = \text{const}\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Grenzwerte spezieller Folgen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\alpha} = 1,\quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lambda} = 1,\ \lambda > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Partialsumme	$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
arithmetische Reihe	$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \dfrac{n}{2}$
geometrische Reihe	$s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1},\ q \neq 1$
Summe einer unendlichen Reihe (falls GW existiert)	$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Konvergenzkriterien $(a_k \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots;\ 0 < q < 1)$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\ \forall\, n$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ bzw.
$\sqrt[n]{a_n} \leq q\ \forall\, n$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Longrightarrow$ Reihe konvergiert

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\ \forall\, n$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ bzw.
$\sqrt[n]{a_n} \geq 1\ \forall\, n$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Longrightarrow$ Reihe divergiert


WE CREATE CHARACTER
top ARBEITGEBER
AUTOMOTIVE DEUTSCHLAND 2014
CERTIFIED EXCELLENCE IN EMPLOYEE CONDITIONS
„An der Entwicklung von innovativen Bordnetzsystemen für Premiumfahrzeuge bin ich direkt beteiligt und das ist eine tolle Erfahrung.“
Oliver, Bordnetzentwickler
„Ich schätze neben meinen abwechslungsreichen, internationalen Aufgaben vor allem die gute Zusammenarbeit mit den Kollegen.“ Judith, Mitarbeiterin im Personalcontrolling
„DRÄXLMAIER bietet mir den Freiraum, mein Aufgabengebiet mitzugestalten. Ich kann sehr flexibel sein und auch im Ausland Verantwortung übernehmen.“
Christian, Mitarbeiter in der Prüftechnik
Unsere Formel für Erfolg: $E = (B + N) \cdot L^A$
Wir sind einer der Top 100 Zulieferer in der Welt der Automobile. Unsere Produkte sind premium; wie unsere Kunden. Wir suchen Mitarbeiter, die Erfolg so definieren wie wir: Erfolg (E) ist die Summe aus Bildung (B) und Neugierde (N), multipliziert mit einer Leidenschaft (L) für das Automobil (A), die alles, was Sie können, potenziert.
Wenn Sie bei der DRÄXLMAIER Group die Zukunft des Automobils mitgestalten wollen, melden Sie sich bei uns.
www.draexlmaier.jobs
DRÄXLMAIER

Funktionen einer Veränderlichen

Darstellung und Eigenschaften von Funktionen

Reelle Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – jeder reellen Zahl x des Definitionsbereiches wird genau eine reelle Zahl y des Wertebereiches zugeordnet: $y = f(x)$.

explizite Form	$y = f(x)$
implizite Form	$F(x, y) = 0$
Parameterdarst.	$x = x(t), \;\; y = y(t)$
Definitionsbereich	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, y \in W_f \colon y = f(x)\}$
Wertebereich	$W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in D_f \colon y = f(x)\}$
eineindeutige F.	zu jedem $y \in W_f$ gibt es genau ein $x \in D_f$ mit $y = f(x)$
inverse Funktion, Umkehrfunktion	ist f eineindeutig, so ist die Abbildung $y \to x$ mit $y = f(x)$ auch eineindeutig; Bezeichnung f^{-1}
Nullstelle	Zahl x_0 mit $f(x_0) = 0$

Monotonie, Symmetrie, Periodizität

$x, x+p, x_1, x_2 \in D_f$ beliebig mit $x_1 < x_2$

monoton wachsende Funktion	$f(x_1) \leq f(x_2)$
monoton fallende Funktion	$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton wachsende F.	$f(x_1) < f(x_2)$
streng monoton fallende F.	$f(x_1) > f(x_2)$
gerade Funktion	$f(-x) = f(x)$
ungerade Funktion	$f(-x) = -f(x)$
periodische Funktion (Periode p)	$f(x+p) = f(x)$

Extremaleigenschaften

$x \in D_f$ beliebig

nach oben beschränkte F.	$\exists\, K : f(x) \le K$
nach unten beschränkte F.	$\exists\, K : f(x) \ge K$
beschränkte Funktion	$\exists\, K : \lvert f(x)\rvert \le K$
globale Maximumstelle	x^*: $f(x^*) \ge f(x)$
globales Maximum	$f(x^*) = \max\limits_{x \in D_f} f(x)$
lokale Maximumstelle	x^*: $f(x^*) \ge f(x),\ x \in U_\varepsilon(x^*)$
globale Minimumstelle	x^*: $f(x^*) \le f(x)$
globales Minimum	$f(x^*) = \min\limits_{x \in D_f} f(x)$
lokale Minimumstelle	x^*: $f(x^*) \le f(x),\ x \in U_\varepsilon(x^*)$

ε-Umgebung von x^*: $U_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x^*| < \varepsilon\}$

Krümmungseigenschaften

$x, y \in D_f$ beliebig; $\lambda \in (0,1)$ beliebig

konvexe Funkt.	$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
streng konv. F.	$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
konkave Funkt.	$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
streng konk. F.	$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Grenzwert und Stetigkeit

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* der Funktion f im Punkt x_0, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ gilt für **jede** gegen den Punkt x_0 konvergierende Punktfolge $\{x_n\}$ mit $x_n \in D_f$. Bezeichnung: $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.

uneigentlicher Grenzwert	$a = +\infty$ oder $a = -\infty$
rechtsseitiger Grenzwert	$\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = a \quad (x > x_0)$
linksseitiger Grenzwert	$\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = a \quad (x < x_0)$

f stetig in $x_0 \in D_f$, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; die Funktion muss also in x_0 definiert sein und einen endlichen Grenzwert besitzen, der mit dem Funktionswert in x_0 übereinstimmt.

Arten von Unstetigkeitsstellen

endlicher Sprung	$\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$
unendlicher Sprung	einer der beiden einseitigen Grenzwerte ist unendlich
Polstelle	$\left\lvert \lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) \right\rvert = \left\lvert \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) \right\rvert = \infty$
Lücke	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ existiert, aber f ist nicht definiert für $x = x_0$ oder es gilt $f(x_0) \neq a$

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^x = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty, \qquad \lim_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x \downarrow 0} x^x = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} q^x = \infty \quad (q > 1), \qquad \lim_{x \to \infty} q^x = 0 \quad (0 < q < 1)$$

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty \quad (n \geq 1), \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x = \mathrm{e}^c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{\alpha x}} = 0 \quad (\alpha > 0,\ n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Existieren $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, so gilt:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \quad \text{falls } g(x) \neq 0, \quad b \neq 0$$

Ist f stetig, so gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$.

Speziell:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)}, \quad a > 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \ln f(x) = \ln\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right), \text{ falls } f(x) > 0$$

Sind die Funktionen f und g stetig auf ihren Definitionsbereichen D_f bzw. D_g, so sind die Funktionen $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ und $\dfrac{f}{g}$ (letztere für $g(x) \neq 0$) stetig auf $D_f \cap D_g$.

Regeln von de l'Hospital für $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$

f und g seien differenzierbar in Umgebung von x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiere (als endlicher oder unendlicher Wert), es gelte $g'(x) \neq 0$ sowie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.

Dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Auch der Fall $x \to \pm\infty$ ist möglich.

Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$ oder $\infty - \infty$ lassen sich durch Umformung auf die Gestalt $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ bringen.

Ausdrücke der Art 0^0, ∞^0 oder 1^∞ werden mittels der Umformung $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$ auf die Form $0 \cdot \infty$ gebracht.

Elementare Funktionen

Lineare Funktionen

$f(x) = ax$	lineare Funktion
$f(x) = ax + b$	affin lineare Funktion

Für lineare Funktionen gilt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \;\; f(\lambda x) = \lambda f(x), \;\; f(0) = 0$$

Für affin lineare Funktionen gilt:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a, \;\; f(-b/a) = 0 \;(a \neq 0), \;\; f(0) = b$$

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Die Funktion $f(x) = b$ (Konstante) ist eine Parallele zur x-Achse.

Quadratische Funktionen

$f(x) = ax^2 + bx + c$	quadratische Funktion
$ax^2 + bx + c = 0 \implies$	$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$
$x^2 + px + q = 0 \implies$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
$D = b^2 - 4ac$ bzw. $D = \frac{p^2}{4} - q$	*Diskriminante*

Für $D > 0$ gibt es zwei reelle, für $D = 0$ eine doppelte und für $D < 0$ keine reelle Nullstelle.

Für $a > 0$ gibt es eine Minimumstelle und für $a < 0$ eine Maximumstelle bei $x = -\frac{p}{2}$.

Für $a > 0$ $(a < 0)$ ist f eine streng konvexe (konkave) Funktion; ihr Graph ist eine nach oben (unten) geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $\left(-\frac{b}{2a},\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Potenzfunktionen

$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ Potenzfunktion

$D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^+$) für n ungerade (gerade)

f ist gerade (ungerade), falls n gerade (ungerade)

$f(x) = x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R},\ x > 0)$ allgemeine Potenzfunktion

$D_f = \mathbb{R}^+$, $W_f = \mathbb{R}^+$, falls $\alpha \geq 0$

$D_f = \{x \mid x > 0\}$, $W_f = \{y \mid y > 0\}$, falls $\alpha \leq 0$

f streng monoton fallend und konkav, falls $\alpha < 0$

f streng monoton wachsend, falls $\alpha > 0$

f konvex, falls $\alpha \geq 1$; $\qquad f$ konkav, falls $0 < \alpha \leq 1$

Polynome = ganze rationale Funktionen

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$a_n \neq 0,\ \ a_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

ganze rationale Funktion, Polynom n-ten Grades

Produktdarstellung (Linearfaktorzerlegung)

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n),$$

x_i – reelle oder komplexe Nullstellen des Polynoms;

komplexe Nullstellen treten stets paarweise in konjugiert komplexer Form auf;

ist eine Nullstelle x_1 bekannt, so kann zur Ermittlung weiterer Nullstellen *Polynomdivision* $p_n(x) : (x - x_1)$ (ohne Rest) angewendet werden

Gebrochen rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$
$$a_m \neq 0,\ b_n \neq 0,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$$

$m < n$: *echt* gebrochen, $m \geq n$: *unecht* gebrochen

eine *unecht* gebrochen rationale Funktion kann durch *Polynomdivision* auf die Form $\boxed{r(x) = p(x) + s(x)}$ gebracht werden ($p(x)$ – Polynom, *Asymptote*; $s(x)$ – *echt* gebrochen rationale Funktion

Nullstelle von f	Zähler $= 0$, Nenner $\neq 0$
Polstelle von f	Zähler $\neq 0$, Nenner $= 0^*$
Lücke von f	Zähler $= 0$, Nenner $= 0^{**}$

* Auch alle gemeinsamen Nullstellen von Zähler und Nenner, deren Vielfachheit im Zähler kleiner als ihre Vielfachheit im Nenner ist.

** Genauer: Gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner, deren Vielfachheit im Zähler größer oder gleich ihrer Vielfachheit im Nenner ist.

Partialbruchzerlegung (von echt gebrochen rationalen Funktionen $f(x) = p_m(x) : q_n(x)$, $m<n$)

1. Darstellung des Nennerpolynoms als Produkt von linearen und quadratischen Polynomen mit reellen Koeffizienten, wobei die quadratischen Polynome konjugiert komplexe Nullstellen besitzen:

   $q_n(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x^2+cx+d)^\gamma \ldots$

2. Ansatz $r(x) = \dfrac{A_1}{x-a} + \dfrac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \dfrac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$

   $$+\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots$$

   $$+\frac{C_1 x + D_1}{x^2+cx+d} + \cdots + \frac{C_\gamma x + D_\gamma}{(x^2+cx+d)^\gamma} + \ldots$$

3. Bestimmung der (reellen) Koeffizienten $A_i, B_i, C_i, D_i, \ldots$ des Ansatzes:
   a) Ansatz auf Hauptnenner bringen
   b) mit Hauptnenner multiplizieren
   c) Einsetzen von $x=a, x=b, \ldots$ liefert $A_\alpha, B_\beta, \ldots$
   d) *Koeffizientenvergleich* liefert lineare Gleichungen für die restlichen unbekannten Koeffizienten

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Exponentialfunktionen

$f(x) = a^x$	Exponentialfunktion, $a \in \mathbb{R}$, $a>0$ a – *Basis*, x – *Exponent*
$f(x) = \mathrm{e}^x = \exp(x)$	Exponentialfunktion zur Basis e
$D_f = \mathbb{R}$,	$W_f = \{y \mid y>0\}$
negativer Exponent:	$a^{-x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, $a>0$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = a^x$ ist die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ (grafisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$).

Logarithmusfunktionen

$f(x) = \log_a x$	Logarithmusfunktion, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ x – *Argument*, a – *Basis*
$a = \mathrm{e}$	$f(x) = \ln x$ Funktion des natürlichen Logarithmus
$a = 10$	$f(x) = \lg x$ Funktion des dekadischen Logarithmus
$W_f = \mathbb{R}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

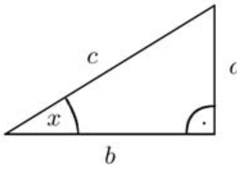
Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

Winkelverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin x = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos x = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan x = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \cot x = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Für Winkel x zwischen $\frac{\pi}{2}$ und 2π werden die Strecken a, b entsprechend ihrer Lage in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit Vorzeichen versehen.



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Definitions- und Wertebereiche

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$y = \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi, k \in \mathbb{N}\}$	$\mathbb{R}$
$y = \cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{x = k\pi, k \in \mathbb{N}\}$	$\mathbb{R}$

Verschiebungs- und Spiegelungseigenschaften

$\sin(\pi+x) = -\sin x$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cos x$

$\cos(\pi+x) = -\cos x$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$

$\tan(\pi+x) = \tan x$ $\qquad$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cot x$

$\cot(\pi+x) = \cot x$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cot x$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\tan x$

Periodizität

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ $\qquad$ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\tan(x + \pi) = \tan x$ $\qquad$ $\cot(x + \pi) = \cot x$

Symmetrie

$\sin(-x) = -\sin x$ $\qquad$ $\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$ $\qquad$ $\cot(-x) = -\cot x$

Spezielle Funktionswerte

Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Gradmaß	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Umrechnung von Winkelfunktionen $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	$\sin x$	$\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\cos x$	$\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$$

Doppelwinkelformeln

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2}{\cot x - \tan x}$$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} = \frac{\cot x - \tan x}{2}$$

Halbwinkelformeln (für $0 < x < \pi$)

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$\cot\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

Summe und Differenz von Winkelfunktionen

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}, \quad \cot x \pm \cot y = \pm\frac{\sin(x\pm y)}{\sin x\sin y}$$

„Mein Job bei HeidelbergCement eignet sich nicht für Unentschlossene. Hier sind individuelle Fähigkeiten genauso wie Teamgeist, Einsatz und Flexibilität gefragt. Und das Beste: Es macht einfach Spaß, Verantwortung zu haben und selbstständig arbeiten zu können. Ich bin Teil eines weltweiten Ganzen und trage Tag für Tag sichtbar zum Erfolg des Unternehmens bei.“

Arkusfunktionen (zyklometrische Funktionen)

Arkus- (= zyklometrische) Funktionen sind die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen.

Definitions- und Wertebereiche

Arkusfunktion	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = \arcsin x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \arctan x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccot} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$

Symmetrieeigenschaften der Arkusfunktionen

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$
$$\arctan(-x) = -\arctan x \qquad \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

Umrechnung von Arkusfunktionen

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} \qquad (0 \le x \le 1)$$
$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} \qquad (0 \le x \le 1)$$
$$\arctan x = \operatorname{arccot} \tfrac{1}{x} \qquad (x > 0)$$
$$\operatorname{arccot} x = \arctan \tfrac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

Additionstheoreme der Arkusfunktionen

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right) \qquad (x^2+y^2 \le 1)$$

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy} \qquad (xy < 1)$$

Hyperbel- und Areafunktionen

$y = \sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$	Hyperbelsinus $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$
$y = \cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$	Hyperbelkosinus $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [1, \infty)$
$y = \tanh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$	Hyperbeltangens $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = (-1, 1)$
$y = \coth x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$	Hyperbelkotangens $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $W_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Die Funktion $\cosh x$ ist gerade; die Funktionen $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$ sind ungerade.

Grundbeziehungen

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$\tanh x \cdot \coth x = 1$
$\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^x$	$\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$

Die Umkehrfunktionen des Hyperbelsinus, Hyperbeltangens, Hyperbelkotangens und des rechten Teils des Hyperbelkosinus werden als *Areafunktionen* bezeichnet.

$y = \operatorname{arsinh} x$ Areasinus; $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$

$y = \operatorname{arcosh} x$ Areakosinus
$D_f = [1, \infty)$, $W_f = [0, \infty)$

$y = \operatorname{artanh} x$ Areatangens
$D_f = (-1, 1)$, $W_f = \mathbb{R}$

$y = \operatorname{arcoth} x$ Areakotangens
$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty), W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Darstellung durch Logarithmusfunktionen:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh} x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1)$$

Umrechnung hyperbolischer Funktionen ($x > 0$)

	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\coth x$
$\sinh x$	$\sinh x$	$\sqrt{\cosh^2 x - 1}$	$\frac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$
$\cosh x$	$\sqrt{\sinh^2 x + 1}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$	$\frac{\coth x}{\sqrt{\cot^2 x - 1}}$
$\tanh x$	$\frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$	$\frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\coth x}$
$\coth x$	$\frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x}$	$\frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$	$\frac{1}{\tanh x}$	$\coth x$

Kurven in der Ebene, Rollkurven $(a, b, c \in \mathbb{R})$

Explizite/impl. Darstellung	Parameter-darstellung	Name
$y = a \cosh \frac{x}{a}$ $(a > 0)$		Kettenlinie
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a \cos t$ $y = b \sin t$	Ellipse
$x^2 + y^2 = a^2$	$x = a \cos t$ $y = a \sin t$	Kreis
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a \cosh t$ $y = b \sinh t$	Hyperbel
$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$	$x = a(\cos t)^3$ $y = a(\sin t)^3$	Astroide
$x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$	$x = 3at/(t^3+1)$ $y = 3at^2/(t^3+1)$	kartesisches Blatt
	$x = a(t - \sin t)$ $y = a(1 - \cos t)$	Zykloide
$(x^2+y^2+2ax)^2$ $= 4a^2(x^2+y^2)$ $(a > 0)^*$	$x = a(c \cos t$ $- c \cos ct)$ $y = a(c \sin t$ $- \sin ct)$	Epizykloide ($c = 2$: Kardioide)
	$x = a(c \cos t$ $- \cos ct)$ $y = a(c \sin t$ $+ \sin ct)$	Hypozykloide ($c = 3$: Astroide)
	$x = a(t \sin t + \cos t)$ $y = a(\sin t - t \cos t)$	Kreis-evolvente

* Kardioide mit Spitze im Koordinatenursprung

Spezielle Funktionen

Euler'sche Gammafunktion (allgemeine Fakultät)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \qquad x > 0$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\cdot n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)}, \quad x \neq 0,-1,-2,\dots$$

$$\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x), \qquad x \neq 0,-1,-2,\dots$$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(-x) = \frac{\pi}{x\cdot\sin\pi x}, \qquad x \neq 0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}, \qquad x \neq 0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!,\ n\in\mathbb{N}, \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(-\tfrac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{für große } x$$

speziell: $\quad n! \approx \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n} \quad$ *Stirling'sche Formel*

Euler'sche Betafunktion

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, \qquad x>0,\ y>0$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x,\, y,\, x+y \neq 0,-1,-2,\dots$$

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y), \quad B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y)$$

Bessel'sche Funktion 1. Art (Ordnung $a \geq 0$)

$$J_a(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^a \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\cdot\Gamma(k+1+a)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad x\in\mathbb{R}$$

Bessel'sche Funktion 2. Art ($p \in \mathbb{R}\setminus\{-1,-2,\dots\}$)

$$N_p(x) = \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}$$

Differenzialrechnung

Falls der Grenzwert $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ existiert, heißt die Funktion f *im Punkt x differenzierbar*; sie ist dann dort auch stetig. Ist f differenzierbar $\forall\, x \in D_f$, so wird sie *differenzierbar* auf D_f genannt.

Der Grenzwert wird *Differenzialquotient* oder *Ableitung* genannt und mit $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ bezeichnet (auch $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $y'(x)$, $f'(x)$). Der Differenzialquotient ist der Anstieg der Tangente an den Graph von f im Punkt $(x, f(x))$.

Differenziationsregeln

	Funktion	Ableitung
Faktorregel	$a \cdot u(x)$	$a \cdot u'(x), \quad a \in \mathbb{R}$
Summenregel	$u(x) \pm v(x)$	$u'(x) \pm v'(x)$
Produktregel	$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
Quotientenregel	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel	$u(z)$, $z = v(x))$	$u'(z) \cdot v'(x)$
Ableitung mittels Umkehrfunktion	$f(x)$	$\dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$
Logarithmische Differenziation	$f(x) \quad (> 0)$	$(\ln f(x))' \cdot f(x)$
Implizite Funktion	$y = f(x)$ gegeben als $F(x,y) = 0$	$f'(x) = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

Ableitungen elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c=\mathrm{const}$	0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg \mathrm{e}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
x^x	$x^x(\ln x+1)$	$\cot x$	$-1-\cot^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x\ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1-\tanh^2 x$	$\coth x$	$1-\coth^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

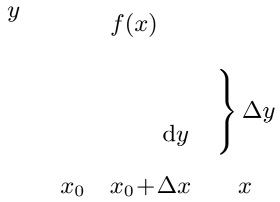
Differenzial

Für eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion f gilt

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot \Delta x + \mathrm{o}(\Delta x)$$

mit $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\mathrm{o}(\Delta x)}{\Delta x} = 0;$

$\mathrm{o}(\cdot)$ – *Landau'sches Symbol*



Der Ausdruck $\mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot \Delta x$ bzw. $\mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$ heißt *Differenzial* der Funktion f im Punkt x_0. Er stellt den Hauptanteil der Funktionswertänderung bei Änderung des Argumentes x_0 um Δx dar: $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Taylorentwicklung

f heißt *n-mal differenzierbar*, wenn die Ableitungen f', $f'' := (f')'$, $f''' := (f'')'$, $\ldots$, $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ existieren; $f^{(n)}$ wird *n-te Ableitung* oder *Ableitung n-ter Ordnung* von f genannt. Mit $f^{(0)}$ wird f selbst bezeichnet.

Satz von Taylor. Die Funktion f sei $(n+1)$-mal in $U_\varepsilon(x_0)$ differenzierbar; $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Dann gibt es eine zwischen x_0 und x gelegene Zahl ξ, für die gilt

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}}$$

Der letzte Summand (= *Restglied*) gibt den Fehler an, wenn man $f(x)$ durch obige Polynomfunktion n-ten Grades ersetzt.

Taylorentwicklung ausgewählter Funktionen $(x_0 = 0)$

Funktion	Taylorpolynom
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$
a^x	$1 + \frac{\ln a}{1!}\, x + \frac{\ln^2 a}{2!}\, x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}\, x^n + \ldots$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 \pm \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots$
$\arcsin x$	$x + \frac{1}{2 \cdot 3}\, x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}\, x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}\, x^7 + \ldots$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2 \cdot 3}\, x^3 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}\, x^5 - \ldots$
$\arctan x$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} \pm \ldots$
$\sinh x$	$x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$
$\cosh x$	$1 + \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{4!}\, x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n} + \ldots$
$\mathrm{e}^{-x^2/2}$	$1 - \frac{1}{1! \cdot 2^1}\, x^2 + \frac{1}{2! \cdot 2^2}\, x^4 - \frac{1}{3! \cdot 2^3}\, x^6 \pm \ldots$

Eigenschaften von Funktionen (beschrieben mittels Ableitungen)

Monotonie

f sei im Intervall $I = [a, b]$ definiert und differenzierbar.

$f'(x) = 0 \ \forall\, x \in I$	$\iff$	f konstant auf I
$f'(x) \geq 0 \ \forall\, x \in I$	$\iff$	f monoton wachsend auf I
$f'(x) \leq 0 \ \forall\, x \in I$	$\iff$	f monoton fallend auf I
$f'(x) > 0 \ \forall\, x \in I$	$\implies$	f streng mon. wachsend auf I
$f'(x) < 0 \ \forall\, x \in I$	$\implies$	f streng mon. fallend auf I

Extremaleigenschaften

$f'(\bar{x}) = 0$		notwendig für Extremum in $\bar{x}$
$f'(\bar{x}) = 0 \wedge f''(\bar{x}) > 0$		hinreichend für Minimum in $\bar{x}$
$f'(\bar{x}) = 0 \wedge f''(\bar{x}) < 0$		hinreichend für Maximum in $\bar{x}$
Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a und b, so gilt:		
$f'(a) > 0$	$\implies$	lokales Minimum in a
$f'(a) < 0$	$\implies$	lokales Maximum in a
$f'(b) < 0$	$\implies$	lokales Minimum in b
$f'(b) > 0$	$\implies$	lokales Maximum in b

Krümmungseigenschaften

f sei im Intervall $I = (a, b)$ zweimal differenzierbar.

$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$	$\iff$	f konvex in I
$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$	$\iff$	f konkav in I
$f''(x_w) = 0$		notwendig für Wendepunkt
$f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$		hinreichend für Wendepunkt in x_w

Integralrechnung

Unbestimmtes Integral

Gilt für eine Funktion $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ die Beziehung $F'(x)=f(x)$ für alle $x\in(a,b)$, so heißt F *Stammfunktion* der Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Die Menge aller Stammfunktionen $\{F+C\mid C\in\mathbb{R}\}$ wird *unbestimmtes Integral* von f auf (a,b) genannt; C ist die Integrationskonstante. Man schreibt $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$.

Integrationsregeln

Konstanter Faktor:

$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x=\lambda\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Summe, Differenz:

$$\int[f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Partielle Integration:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Substitution:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x=\int f(z)\,\mathrm{d}z,\qquad z=g(x)$$

Speziell $f(z)=\frac{1}{z}$:

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|g(x)|+C,\qquad g(x)\neq 0$$

Lineare Substitution:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{a}F(ax+b)+C$$

$(a,b\in\mathbb{R},a\neq 0,\ F$ Stammfunktion von $f)$

Tabellen wichtiger unbestimmter Integrale[1]

Potenzfunktionen

$\int x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1,\ x \neq 0$ für $n < 0$ bzw. $n \in \mathbb{R},\ n \neq -1,\ x > 0$
$\int \dfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert$	$x \neq 0$

Exponential- und Logarithmusfunktionen

$\int a^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a}$	$a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$
$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$	
$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - x$	$x > 0$

Trigonometrische Funktionen

$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$	$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$
$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
$\int \cot x \,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert$	$x \neq k\pi$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \tan x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\cot x$	$x \neq k\pi$

[1] Die Integrationskonstante wird stets weggelassen.

Arkusfunktionen

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \qquad |x| \leq 1$$

$$\int \arccos x \,\mathrm{d}x = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} \qquad |x| \leq 1$$

$$\int \arctan x \,\mathrm{d}x = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\int \operatorname{arccot} x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Rationale Funktionen

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} \,\mathrm{d}x = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \qquad |x| > 1$$

Irrationale Funktionen

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x \qquad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \operatorname{arcsinh} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad |x| > 1$$

Hyperbelfunktionen

$$\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x \qquad \int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x$$

$$\int \tanh x \,\mathrm{d}x = \ln \cosh x$$

$$\int \coth x \,\mathrm{d}x = \ln|\sinh x| \qquad x \neq 0$$

Areafunktionen

$$\int \mathrm{arsinh} x \,\mathrm{d}x = x \,\mathrm{arsinh} x - \sqrt{1+x^2}$$

$$\int \mathrm{arcosh} x \,\mathrm{d}x = x \,\mathrm{arcosh} x - \sqrt{x^2-1} \qquad x > 1$$

$$\int \mathrm{artanh} x \,\mathrm{d}x = x \,\mathrm{artanh} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) \qquad |x| < 1$$

$$\int \mathrm{arcoth} x \,\mathrm{d}x = x \,\mathrm{arcoth} x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) \qquad |x| > 1$$

Nicht geschlossen darstellbare Integrale

$$\int \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \sin x^2 \,\mathrm{d}x \qquad \int \cos x^2 \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{si}\, x \qquad \text{(Integralsinus)}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{ci}\, x \qquad \text{(Integralkosinus)}$$

$$\int \frac{1}{\ln x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^y}{y} \,\mathrm{d}y = \mathrm{li}\, x \qquad \text{(Integrallogarithmus)}$$

Integration gebrochen rationaler Funktionen

$$\int \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \,\mathrm{d}x$$

Mithilfe von Polynomdivision und Partialbruchzerlegung (durch Koeffizientenvergleich) kann man die Integrale auf solche über Polynome und spezielle *Partialbrüche* zurückführen. Die wichtigsten Fälle letzterer besitzen folgende Integrale (Voraussetzungen: $x - a \neq 0,\ k > 1,\ p^2 < 4q$):

$$\int \frac{1}{x-a} \,\mathrm{d}x = \ln|x-a|$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \,\mathrm{d}x = \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(B - \frac{1}{2}Ap\right) \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{n+1}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n(4q-p^2)} \cdot \left[\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + (4n-2) \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} \,\mathrm{d}x \right]$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \,\mathrm{d}x = -\frac{A}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \tfrac{1}{2}Ap\right) \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} \,\mathrm{d}x$$

Einige nützliche Substitutionen

Integrand	Bedingung	Substitution
$\sin^n x \cos^m x$	m ungerade	$t=\sin x,\ \cos^2 x=1-t^2$
$\sin^n x \cos^m x$	n ungerade	$t=\cos x,\ \sin^2 x=1-t^2$
$\sin^n x \cos^m x$	n, m gerade	$t=\tan x, \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$
$R(x,\ \sqrt[n]{ax+b})^*$		$x=\dfrac{1}{a}(t^n-b)$
$R(\mathrm{e}^x)$		$t=\mathrm{e}^x$
$R(x, \sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$	$x=a\sinh t$
$R(x, \sqrt{x^2-a^2})$	$a \neq 0$	$x=a\cosh t$
$R(x, \sqrt{a^2-x^2})$	$a \neq 0$	$x=a\sin t$
$R(x, \sqrt{D})^{**}$	$a>0$	$\sqrt{D}=t-\sqrt{a}x$
$R(x, \sqrt{D})$	$c>0$	$\sqrt{D}=xt+\sqrt{c}$
$R(x, \sqrt{D})$	***	$\sqrt{D}=t(x-x_1)$
$R(\sinh x, \cosh x)$		$t=\mathrm{e}^x$
$R(\sin x, \cos x)$		$t=\tan\dfrac{x}{2}, \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$
$R\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$		$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

* $R(u,v)$ sei eine rationale Funktion von u und v

** $D=ax^2+bx+c$

*** D besitzt verschiedene reelle Wurzeln, darunter x_1

Integrale rationaler und irrationaler Funktionen

$$\int (ax+b)^n \,\mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$$

$$\int \frac{ax+b}{fx+g}\,\mathrm{d}x = \frac{ax}{f} + \frac{bf-ag}{f^2}\ln|fx+g|$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 \pm x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(a^2 \pm x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 \pm x^2)^n}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^3 \pm x^3} = \pm\frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x \mp a}{a\sqrt{3}}$$

$$\int \sqrt{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a(2+n)}\sqrt{(ax+b)^{n+2}} \qquad (n \neq -2)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| & \text{für } b > 0 \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} & \text{für } b < 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (|x| < |a|)$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right)$$

$$\int x\sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + a^2)^3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right)$$

$$\int x\sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 - a^2)^3} \qquad (|x| \geq |a|)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) \qquad (|x| \geq |a|)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 - a^2} \qquad (|x| \geq |a|)$$

Integrale trigonometrischer Funktionen

$$\int \sin ax \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \sin^2 ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \sin^n ax \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{na}\sin^{n-1} ax \cos ax + \tfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax \,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\int x \sin ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax$$

$$\int x^n \sin ax \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}x^n \cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax \,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\int \frac{1}{\sin ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n ax} = -\frac{\cos ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2} ax} \qquad (n > 1)$$

$$\int \cos ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$\int \cos^2 ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \cos^n ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{na}\sin ax \cos^{n-1} ax + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax \,\mathrm{d}x$$

$$\int x^n \cos ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^n \sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n ax} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{\sin ax}{a\cos^{n-1} ax} + (n-2)\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2} ax}\right] \quad (n > 1)$$

$$\int \sin ax \cos ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$$

$$\int \tan ax \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax|$$

$$\int \tan^n ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a(n-1)}\tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax \,\mathrm{d}x \quad (n \neq 1)$$

$$\int \cot ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|$$

$$\int \cot^n ax \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a(n-1)}\cot^{n-1} ax - \int \cot^{n-2} ax \,\mathrm{d}x \quad (n \neq 1)$$

Integrale von Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$$

$$\int x^n \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^n\mathrm{e}^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \ln ax \,\mathrm{d}x = x\ln ax - x$$

$$\int \frac{\ln^n x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} x$$

$$\int \frac{1}{a + b\cdot\mathrm{e}^{cx}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac}\ln\left(a + b\cdot\mathrm{e}^{cx}\right)$$

Bestimmtes Integral

Die Fläche A, die im Intervall $[a,b]$ zwischen der x-Achse und dem Graphen der beschränkten Funktion f liegt, kann näherungsweise durch Summanden der Form

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)}) \cdot \left[x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right]$$

gebildet werden, wobei $a = x_0^{(n)} \leq x_1^{(n)} \leq \ldots \leq x_n^{(n)} = b$ gilt und $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ willkürlich gewählt werden. Durch Grenzübergang für $n \to \infty$ und $x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)} \to 0$ entsteht unter gewissen Voraussetzungen das *bestimmte Integral* der Funktion f über dem Intervall $[a,b]$, das gleich der Maßzahl der Fläche A ist: $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A}$

Eigenschaften und Rechenregeln

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad\qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

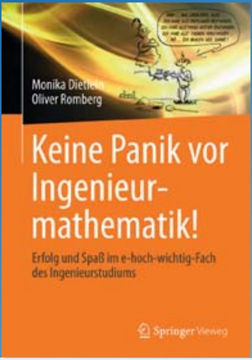
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \qquad a < b$$

Ist f stetig auf $[a,b]$, so ist $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in [a,b]$ eine differenzierbare Funktion:

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = f(x)}$$

Springer Vieweg springer-vieweg.de



Neues aus der “Keine Panik” Reihe

Monika Dietlein, Oliver Romberg

Keine Panik vor Ingenieurmathematik!

Erfolg und Spaß im e-hoch-wichtig-Fach des Ingenieurstudiums

2014. VIII, 310 S. 61 Abb. Brosch.

€ (D) 24,99 | € (A) 25,69 | *sFr 31,50

ISBN 978-3-8348-1567-5

€ (D) sind gebundene Ladenpreise in Deutschland und enthalten 7% MwSt. € (A) sind gebundene Ladenpreise in Österreich und enthalten 10% MwSt. Die mit * gekennzeichneten Preise sind unverbindliche Preisempfehlungen und enthalten die landesübliche MwSt. Preisänderungen und Irrtümer vorbehalten.

Weitere „Keine Panik“ Titel finden Sie hier

A09710

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist f auf $[a, b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$, so gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a)}$$

Uneigentliche Integrale

Unbeschränkter Integrand

Die Funktion f habe an der Stelle $x = b$ eine Polstelle und sei beschränkt und integrierbar über jedem Intervall $[a, b-\varepsilon]$ mit $0 < \varepsilon < b-a$. Wenn das Integral von f über $[a, b-\varepsilon]$ für $\varepsilon \to 0$ einen Grenzwert besitzt, wird dieser *uneigentliches Integral* von f über $[a, b]$ genannt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist $x = a$ eine Polstelle von f, so gilt analog:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Unbeschränktes Intervall

Die Funktion f sei für $x \geq a$ definiert und über jedem Intervall $[a, b]$ integrierbar. Wenn der Grenzwert des Integrals von f über $[a, b]$ für $b \to \infty$ existiert, so wird er *uneigentliches Integral* von f über $[a, \infty)$ genannt (analog für $a \to -\infty$):

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Parameterintegrale

Ist $f(x,t)$ für $a \le x \le b$, $c \le t \le d$ für festes t bezüglich x über $[a,b]$ integrierbar, so ist

$$F(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

eine Funktion von t, die als *Parameterintegral* (mit dem Parameter t) bezeichnet wird.

Differenziation unter dem Integralzeichen

Ist f nach t partiell differenzierbar und die partielle Ableitung f_t stetig, so ist die Funktion F (nach t) differenzierbar, und es gilt

$$\dot{F}(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

Parameterabhängige Integrationsgrenzen

Sind φ und ψ zwei für $c \le t \le d$ differenzierbare Funktionen und ist $f(x,t)$ in dem Bereich $\varphi(t) < x < \psi(t)$, $c \le t \le d$ partiell nach t differenzierbar mit stetiger partieller Ableitung, so ist das Parameterintegral über f mit den Grenzen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ für $c \le t \le d$ nach t differenzierbar, wobei gilt

$$F(t) = \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow$$

$$\dot{F}(t) = \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + f(\psi(t),t)\dot{\psi}(t) - f(\varphi(t),t)\dot{\varphi}(t)$$

Spezialfall: Ableitung nach oberer Integrationsgrenze

$$F(x) = \int\limits_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

Numerische Berechnung bestimmter Integrale

Um das Integral $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ näherungsweise numerisch zu berechnen, wird das Intervall $[a,b]$ in n äquidistante Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ geteilt, wodurch sich die Punkte $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ ergeben; es gelte $y_i = f(x_i)$.

Sehnen-Trapez-Formel:

$$I \approx \tfrac{h}{2} \cdot [y_0 + y_n + 2\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})]$$

Speziell für kleine Intervalle: $n = 1$:

$$I \approx \tfrac{h}{2} \cdot [y_0 + y_1] = \tfrac{b-a}{2} \cdot [f(a) + f(b)]$$

Tangenten-Trapez-Formel: (n gerade)

$$I \approx 2h \cdot [y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}]$$

Simpson-Regel: (n gerade)

$$I \approx \tfrac{h}{3} \cdot [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) \\ +2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})]$$

Newton-Côtes-Formel:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} w_i y_i \quad \text{mit} \quad w_i = \int_a^b L_i(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

i-tes Lagrange-Polynom

Doppelintegrale

$I = \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b$ beschreibt das Volumen des „Zylinders“ (der Säule) über dem Bereich $B = \{(x,y)\,|\,a \le x \le b,$ $y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ der (x,y)-Ebene unter der Fläche $z = f(x,y)$; Vor.: $f(x,y) \ge 0$ ($\mathrm{d}b$ – Flächenelement).

Flächenelemente

kartesische Koordinaten x, y	$\mathrm{d}b = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
Polarkoordinaten r, φ ($r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$)	$\mathrm{d}b = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
allgemeine Koordinaten u, v	$\mathrm{d}b = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Hierbei ist $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ die sog. *Funktionaldeterminante*, die als ungleich null vorausgesetzt wird.

Berechnung über iterierte Integration

$$I = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Analog kann I bez. des Bereichs $B_1 = \{(x,y) | x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$ berechnet werden; in diesem Fall ändert sich die Integrationsreihenfolge.

Ist speziell $B = \{(x,y)\,|\,a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ein Rechteck, so gilt:

$$I = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Koordinatentransformation

Allgemeine Transformation $x = x(u,v),\ y = y(x,v)$:

$$I = \iint\limits_{B^*} f(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

(Integrationsgrenzen gemäß Transformation ändern)

Spezialfall Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$:

$$I = \iint\limits_{B} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Dreifache Integrale

$I = \iiint\limits_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}k = \iiint\limits_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z;$

$K = \{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in B,\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$ – Körper im $\mathbb{R}^3$ über dem Bereich $B = \{(x,y)\,|\,a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ der (x,y)-Ebene; $\mathrm{d}k$ – Volumenelement

Berechnung über iterierte Integration

$$I = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

Analog kann I in der Reihenfolge zxy, yzx, yxz, xzy bzw. xyz berechnet werden, wenn der Körper K entsprechend beschrieben ist.

$f(x,y,z) \equiv 1$: $I = \iiint\limits_K \mathrm{d}k$ – Volumen des Körpers K

Koordinatentransformation

Allgemeine Transformation:

$x = x(u,v,w)$, $y = y(x,v,w)$, $z = z(x,y,w)$:

$$I = \iiint\limits_{K^*} g(u,v,w)\,\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w;$$

wobei $g(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$,

$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$ – Funktionaldeterminante (Vor.: $\neq 0$)

(Integrationsgrenzen gemäß Transformation ändern)

Transformation kartesischer in Zylinderkoordinaten:

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$

$(r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$

$$I = \iiint\limits_{K^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

Transformation kartesischer in Kugelkoordinaten:

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z = r\cos\vartheta$

$(r \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi)$

$$I = \iiint\limits_{K^*} g(r,\vartheta,\varphi)\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

wobei gilt

$$g(r,\vartheta,\varphi) = f(r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$$

Volumenelemente

kartesische Koord. x, y, z	$\mathrm{d}k = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
Zylinderkoordinaten r, φ, z	$\mathrm{d}k = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$
Kugelkoordinaten r, ϑ, φ	$\mathrm{d}k = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$
allgemeine Koord. u, v, w	$\mathrm{d}k = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$

Spezielles Dreifachintegral bei festen Grenzen

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d \int\limits_e^f f(x)\cdot g(y)\cdot h(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_c^d g(y)\,\mathrm{d}y \cdot \int\limits_e^f h(z)\,\mathrm{d}z$$

Anwendungen der Integralrechnung

Flächeninhalt eines ebenen Bereichs B	$A = \iint\limits_B \mathrm{d}b$
Masse mit Flächen-Massendichte ϱ	$M = \iint\limits_B \varrho(x,y)\,\mathrm{d}b$
Volumen des „Zylinders“ zwischen ebenem Bereich B und Fläche $z=f(x,y)$	$V = \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b$
Schwerpunktkoordinaten einer Fläche mit Massendichte ϱ	$x_s = \frac{1}{M}\iint\limits_B x\,\varrho(x,y)\,\mathrm{d}b$ $y_s = \frac{1}{M}\iint\limits_B y\,\varrho(x,y)\,\mathrm{d}b$
Schwerpunktkoordinaten einer homogenen Fläche	$x_s = \frac{1}{A}\iint\limits_B x\,\mathrm{d}b$ $y_s = \frac{1}{A}\iint\limits_B y\,\mathrm{d}b$
Trägheitsmomente bez. der Koordinatenachsen: ebene Fläche	$J_x = \iint\limits_B y^2\varrho(x,y)\,\mathrm{d}b$ $J_y = \iint\limits_B x^2\varrho(x,y)\,\mathrm{d}b$
homogene Fläche	setze $\varrho(x,y) \equiv 1$
Volumen eines Rotationskörpers bei Rotation der Kurve $y(x)$ um die x-Achse	$V = \pi\int\limits_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x$

Satz von Steiner: $\boxed{J_A = a^2M + J_S}$

(a – Abstand zwischen Achse A und Schwerpunkt, S – zu A parallele Achse durch Schwerpunkt)

Volumen eines Körpers	$V = \iiint\limits_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
Masse eines Körpers mit Massendichte ϱ	$M = \iiint\limits_K \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
Schwerpunktkoordinaten eines Körpers mit Massendichte ϱ	$x_s = \frac{1}{M}\iiint\limits_K \varrho(x,y,z)x\,\mathrm{d}k$ $y_s = \frac{1}{M}\iiint\limits_K \varrho(x,y,z)y\,\mathrm{d}k$ $z_s = \frac{1}{M}\iiint\limits_K \varrho(x,y,z)z\,\mathrm{d}k$
Schwerpunktkoordinaten eines homogenen Körpers	$x_s = \frac{1}{V}\iiint\limits_K x\,\mathrm{d}k$ $y_s = \frac{1}{V}\iiint\limits_K y\,\mathrm{d}k$ $z_s = \frac{1}{V}\iiint\limits_K z\,\mathrm{d}k$
Trägheitsmoment eines Körpers bez. beliebiger Achse A	$J_A = \iiint\limits_K r_A^2\,\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}k$ (r_A Abstand von A)
Trägheitsmomente bezüglich der Koordinatenachsen	$J_x = \iiint\limits_K (y^2+z^2)\,\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}k$ $J_y = \iiint\limits_K (x^2+z^2)\,\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}k$ $J_z = \iiint\limits_K (x^2+y^2)\,\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}k$
homogener Körper	setze $\varrho(x,y,z) \equiv 1$

Satz von Steiner: $\boxed{J_A = a^2 V + J_S}$

(a – Abstand zwischen Achse A und Schwerpunkt, S – zu A parallele Achse durch Schwerpunkt)

Differenzialgleichungen

Gewöhnliche DGL n-ter Ordnung

$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$	–	implizite Form
$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$	–	explizite Form

Jede n-mal stetig differenzierbare Funktion $y(x)$, die die obige Differenzialgleichung für alle x, $a \leq x \leq b$, erfüllt, heißt *(spezielle) Lösung* der gewöhnlichen Differenzialgleichung im Intervall $[a, b]$ (möglich: $a = -\infty$, $b = +\infty$). Die Gesamtheit aller Lösungen einer DGL oder eines Systems von DGL wird als *allgemeine Lösung* bezeichnet.

Sind an einer Stelle (z. B. $x = a$) zusätzliche Bedingungen an die Lösung gestellt, so spricht man von einem *Anfangswertproblem*. Sind zusätzliche Bedingungen an den Stellen a und b einzuhalten, liegt ein *Randwertproblem* vor.

System gewöhnlicher Differenzialgleichungen: Für mehrere unbekannte Funktionen sind mehrere Gleichungen gegeben, die deren Ableitungen enthalten.

Differenzialgleichungen erster Ordnung

$y' = f(x, y)$	oder
$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$	oder
$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$	

Ordnet man jedem Punkt der x, y-Ebene die durch die Größe $f(x, y)$ gegebene Tangentenrichtung der Lösungskurven zu, so entsteht das *Richtungsfeld*. Die Kurven gleicher Richtungen des Richtungsfeldes sind die *Isoklinen*.

Separierbare Differenzialgleichungen

Besitzt eine Differenzialgleichung die Form

$$y' = r(x)s(y) \quad \text{bzw.} \quad P(x) + Q(y)y' = 0$$

$$\text{bzw.} \quad P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

so kann sie stets mittels *Trennung der Variablen*, d. h. Ersetzen von y' durch $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und Umordnen, in die Form

$$R(x)\,\mathrm{d}x = S(y)\,\mathrm{d}y$$

gebracht werden. Durch „formales Integrieren" erhält man daraus die allgemeine Lösung:

$$\int R(x)\mathrm{d}x = \int S(y)\mathrm{d}y \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) = \psi(y) + C$$

Lineare DGL erster Ordnung

$$\boxed{y' + a(x)y \;=\; r(x)}$$

$r(x) \not\equiv 0$ – inhomogene DGL,
$r(x) \equiv 0$ – homogene DGL

Die allgemeine Lösung ist die Summe aus der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung und einer speziellen Lösung y_s der inhomogenen Differenzialgleichung:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_s(x)}$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: Die allgemeine Lösung $y_h(x)$ von $y' + a(x)y = 0$ wird durch Trennung der Variablen ermittelt. Das Ergebnis lautet

$$\boxed{y_h(x) = C\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}, \quad C = \text{const}}$$

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL: Eine spezielle Lösung $y_s(x)$ von $y' + a(x)y = r(x)$ erhält man nach

Lösen der zugehörigen homogenen DGL durch *Variation der Konstanten* in derselben, d. h. vermittels des Ansatzes $y_s(x) = C(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$. Für $C(x)$ ergibt sich

$$\boxed{C(x) = \int r(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}$$

Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x), \;\; a_n(x) \not\equiv 0}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ($r(x) \not\equiv 0$) ergibt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL ($r(x) \equiv 0$) und einer speziellen Lösung y_s der inhomogenen DGL:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_s(x)}$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL

Sind alle Koeffizientenfunktionen a_k stetig, so existiert ein *Fundamentalsystem* von n Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ derart, dass die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL folgende Form hat:

$$\boxed{y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)}$$

Die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn jede dieser Funktionen y_k Lösung der homogenen DGL ist und wenn es mindestens ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, für das die *Wronski-Determinante*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

ungleich null ist. Sie lassen sich durch das Lösen der folgenden n Anfangswertprobleme gewinnen ($k=1,\ldots,n$):

$$\boxed{\begin{aligned} & a_n(x)y_k^{(n)}+\ldots+a_1(x)y_k'+a_0(x)y_k = 0, \\ & y_k^{(i)}(x_0)=\begin{cases} 0, & i \neq k-1 \\ 1, & i = k-1 \end{cases} \qquad i = 0,1,\ldots,n-1 \end{aligned}}$$

Erniedrigung der Ordnung einer DGL: Kennt man eine spezielle Lösung $\widehat{y}$ der homogenen DGL n-ter Ordnung, kann man mittels der Substitution $y(x) = \widehat{y}(x) \int z(x)\,\mathrm{d}x$ die Ordnung der DGL um eins erniedrigen.

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL

Ist $\{y_1,\ldots,y_n\}$ ein Fundamentalsystem, so erhält man über den Ansatz

$$\boxed{y_s(x) \;=\; C_1(x)y_1(x) \;+\; \ldots \;+\; C_n(x)y_n(x)}$$

mittels *Variation der Konstanten* eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL, indem man die Ableitungen der Funktionen $C_1,\ldots,C_n$ als Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1C_1' + \quad y_2C_2' + \ldots + \quad y_nC_n' &= \quad 0 \\ y_1'C_1' + \quad y_2'C_2' + \ldots + \quad y_n'C_n' &= \quad 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)}C_1' + y_2^{(n-2)}C_2' + \ldots + y_n^{(n-2)}C_n' &= \quad 0 \\ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}C_n' &= \frac{r(x)}{a_n(x)} \end{aligned}$$

bestimmt; anschließend werden die Funktionen C_i durch Integration berechnet.

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 = r(x), \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_s(x)}$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL

Die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ des Fundamentalsystems werden über den Ansatz $\boxed{y = \mathrm{e}^{\lambda x}}$ bestimmt. Die n Werte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d. h. Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\boxed{a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

Zu den n Nullstellen λ_k der charakteristischen Gleichung lassen sich die n Funktionen des Fundamentalsystems gemäß folgender Tabelle bestimmen:

Art und Ordnung der Nullstelle	Funktionen des Fundamentalsystems
λ_k reell, einfach	$\mathrm{e}^{\lambda_k x}$
λ_k reell, p-fach	$\mathrm{e}^{\lambda_k x}$, $x\mathrm{e}^{\lambda_k x}, \ldots,$ $x^{p-1}\mathrm{e}^{\lambda_k x}$
$\lambda_k = a \pm b\mathrm{i}$ konjugiert komplex, einfach	$\mathrm{e}^{ax}\sin bx$, $\mathrm{e}^{ax}\cos bx$
$\lambda_k = a \pm b\mathrm{i}$ konjugiert komplex, p-fach	$\mathrm{e}^{ax}\sin bx$, $x\mathrm{e}^{ax}\sin bx, \ldots,$ $x^{p-1}\mathrm{e}^{ax}\sin bx, \mathrm{e}^{ax}\cos bx,$ $x\mathrm{e}^{ax}\cos bx, \ldots,$ $x^{p-1}\mathrm{e}^{ax}\cos bx$

Die allgemeine Lösung y_h der homogenen DGL ist

$$\boxed{y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)}$$

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL

Besitzt die Inhomogenität r eine einfache Struktur, so kann y_s durch einen Ansatz gemäß nachstehender Tabelle bestimmt werden:

$r(x)$	Ansatz für $y_s(x)$
$A_m x^m + \ldots + A_1 x + A_0$	$b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$
$A\mathrm{e}^{\alpha x}$	$a\mathrm{e}^{\alpha x}$
$A \sin \omega x$ od. $B \cos \omega x$ od. $A \sin \omega x + B \cos \omega x$	$a \sin \omega x + b \cos \omega x$
Kombination obiger Funkt.	Kombinat. der Ansätze

Resonanzfall: Ist ein Summand des Ansatzes Lösung der homogenen DGL, so wird der Ansatz so oft mit x multipliziert, bis kein Summand mehr Lösung der homogenen DGL ist.

Euler'sche Differenzialgleichung

Haben in der allgemeinen linearen Differenzialgleichung n-ter Ordnung die Koeffizientenfunktionen die Gestalt $a_k(x) = a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, so erhält man

$$\boxed{a_n x^n y^{(n)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y \;=\; r(x)}$$

Die Substitution $x = \mathrm{e}^{\xi}$ führt auf eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $y(\xi)$. Deren *charakteristische Gleichung* lautet

$$\boxed{a_n \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+1) + \ldots + a_2 \lambda(\lambda-1) + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + r_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + r_n(x) \end{array} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Die allgemeine Lösung hat die Form $\overrightarrow{y}(x) = \overrightarrow{y_h}(x) + \overrightarrow{y_s}(x)$, wobei $\overrightarrow{y_h}$ die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ und $\overrightarrow{y_s}$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y} + \overrightarrow{r}$ ist.

Allgemeine Lösung des homogenen Systems

Fall 1 A ist diagonalisierbar und hat nur reelle Eigenwerte $\lambda_k,\ k = 1, \ldots, n$ (mehrfache Eigenwerte werden entsprechend mehrfach gezählt); $\overrightarrow{v_k}$ seien die zugehörigen reellen Eigenvektoren. Dann lautet die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\boxed{\overrightarrow{y_h}(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\overrightarrow{v_1} + \ldots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}\overrightarrow{v_n}}$$

Fall 2 A ist diagonalisierbar und hat konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda_k = \alpha + \beta \mathrm{i}$, $\lambda_{k+1} = \alpha - \beta \mathrm{i}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\,\mathrm{i}$, $\overrightarrow{v_{k+1}} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\,\mathrm{i}$. Dann sind in der allgemeinen Lösung $\overrightarrow{y_h}$ die Terme mit den Indizes k und $k+1$ wie folgt zu ersetzen:

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{y_h}(x) = \ldots &+ C_k \mathrm{e}^{\alpha x}(\overrightarrow{a}\cos\beta x - \overrightarrow{b}\sin\beta x) \\ &+ C_{k+1}\mathrm{e}^{\alpha x}(\overrightarrow{a}\sin\beta x + \overrightarrow{b}\cos\beta x) + \ldots \end{aligned}}$$

Fall 3 A ist nicht diagonalisierbar (komplizierter).

Spezielle Lösung des inhomogenen Systems

Eine spezielle Lösung $\overrightarrow{y_s}$ kann durch Variation der Konstanten oder mittels geeigneter Ansatzfunktionen ermittelt werden.

Griechisches Alphabet

Name	Kleinbuchstabe	Großbuchstabe
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ, ε	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	$\theta,\ \vartheta$	Θ
Jota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omikron	o	O
Pi	$\pi,\ \varpi$	Π
Rho	ρ, ϱ	P
Sigma	$\sigma,\ \varsigma$	Σ
Tau	τ	T
Ypsilon	υ	Υ
Phi	$\phi,\ \varphi$	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Sachwortverzeichnis

Das Wichtigste immer dabei! Diese Formelsammlung Mathematik bietet Studierenden der ingenieurwissenschaftlichen Fächer die wichtigsten Formeln für den täglichen Gebrauch im praktischen Westentaschenformat. Hier findet der Studierende für jedes Problem die richtige Lösung.

Der Autor
Prof. Dr. Bernd Luderer, TU Chemnitz

▶ **www.springer.com**

KNO-Nr. A08713