

B1 Statik starrer Körper

J. Villwock, Berlin; A. Hanau, Berlin

B1.1 Allgemeines

Statik ist die Lehre vom Gleichgewicht am starren Körper oder an Systemen von starren Körpern. Gleichgewicht herrscht, wenn sich ein Gebilde in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung befindet. *Starre Körper* im Sinne der Statik sind Gebilde, deren Deformationen so klein sind, dass die Kraftangriffspunkte vernachlässigbar kleine Verschiebungen erfahren.

Kräfte sind linienflüchtige, auf ihrer Wirkungslinie verschiebbare Vektoren, die Bewegungs- oder Formänderungen von Körpern bewirken. Ihre Bestimmungsstücke sind Größe, Richtung und Lage (**Bild 1 a**).

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z = F_x e_x + F_y e_y + F_z e_z \\ &= (F \cos \alpha) \mathbf{e}_x + (F \cos \beta) \mathbf{e}_y + (F \cos \gamma) \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (1)$$

wobei

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (2)$$

Für die Richtungskosinusse der Kraft gilt $\cos \alpha = F_x/F$, $\cos \beta = F_y/F$, $\cos \gamma = F_z/F$ sowie $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Es gibt eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte sowie äußere und innere Kräfte. Äußere Kräfte sind alle von außen auf einen freigemachten Körper (s. **B1.5**) einwirkende Kräfte (Belastungen und Auflagerkräfte). Innere Kräfte sind alle im Inneren eines Systems auftretende Schnitt- und Verbindungskräfte.

Momente oder Kräftepaare bestehen aus zwei gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Kräften mit parallelen Wirkungslinien (**Bild 1 b**) oder einem Vektor, der auf ihrer Wirkungsebene senkrecht steht. Dabei bilden \mathbf{r} , \mathbf{F} , \mathbf{M} eine Rechtsschraube (Rechtssystem). Kräftepaare sind in ihrer Wirkungsebene und senkrecht zu dieser beliebig verschiebbar, d. h. der Momentenvektor ist ein freier Vektor, festgelegt durch das Vektorprodukt

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = M_x \mathbf{e}_x + M_y \mathbf{e}_y + M_z \mathbf{e}_z \\ &= M_x e_x + M_y e_y + M_z e_z \\ &= (M \cos \alpha^*) \mathbf{e}_x + (M \cos \beta^*) \mathbf{e}_y + (M \cos \gamma^*) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (3)$$

$$M = |\mathbf{M}| = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{F}| \cdot \sin \varphi = F h = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (4)$$

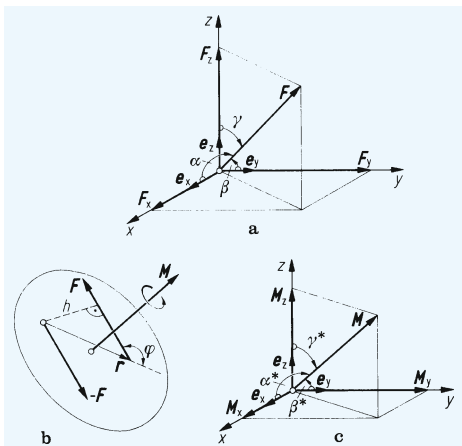


Bild 1. Vektordarstellung. a) Kraft; b) Kräftepaar; c) Moment

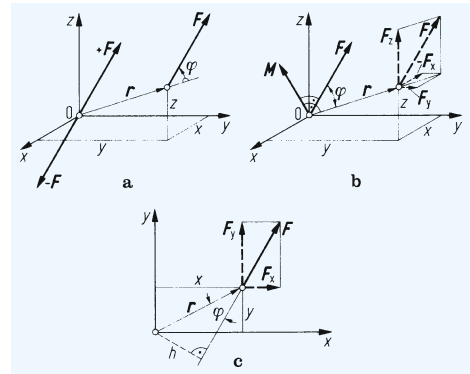


Bild 2. Kraft und Moment. a und b Kraftversetzung; c Moment in der Ebene

M heißt Größe oder Betrag des Moments und bedeutet anschaulich den Flächeninhalt des von \mathbf{r} und \mathbf{F} gebildeten Parallelogramms. Dabei ist h der senkrecht zu \mathbf{F} stehende Hebelarm. Für die Richtungskosinusse gilt (**Bild 1 c**) $\cos \alpha^* = M_x/M$, $\cos \beta^* = M_y/M$, $\cos \gamma^* = M_z/M$.

Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes (Versetzungsmoment). Die Wirkung einer Einzelkraft mit beliebigem Angriffspunkt bezüglich eines Punktes O wird mit dem Hinzufügen eines Nullvektors, d. h. zweier gleich großen, entgegengesetzt gerichteter Kräfte \mathbf{F} und $-\mathbf{F}$ im Punkt O (**Bild 2 a**) deutlich. Es ergibt sich eine Einzelkraft \mathbf{F} im Punkt O und ein Kräftepaar bzw. Moment \mathbf{M} (Versetzungsmoment), dessen Vektor auf der von \mathbf{r} und \mathbf{F} gebildeten Ebene senkrecht steht. Sind \mathbf{r} und \mathbf{F} in Komponenten x, y, z bzw. F_x, F_y, F_z gegeben (**Bild 2 b**), so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= (F_z y - F_y z) \mathbf{e}_x + (F_x z - F_z x) \mathbf{e}_y + (F_y x - F_x y) \mathbf{e}_z \\ &= M_x \mathbf{e}_x + M_y \mathbf{e}_y + M_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Für die Komponenten, den Betrag des Momentenvektors und die Richtungskosinusse gilt

$$M_x = F_z y - F_y z, \quad M_y = F_x z - F_z x,$$

$$M_z = F_y x - F_x y;$$

$$M = |\mathbf{M}| = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{F}| \cdot \sin \varphi = F h$$

$$= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$

$$\cos \alpha^* = M_x/M, \quad \cos \beta^* = M_y/M, \quad \cos \gamma^* = M_z/M.$$

Liegt der Kraftvektor in der x, y -Ebene, d. h., sind z und F_z gleich null, so folgt (**Bild 2 c**)

$$\mathbf{M} = M_z = (F_y x - F_x y) \mathbf{e}_z;$$

$$M = |\mathbf{M}| = M_z = F_y x - F_x y = F r \sin \varphi = F h.$$

B1.2 Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt

B1.2.1 Ebene Kräftegruppe

Zusammensetzen von Kräften zu einer Resultierenden. Kräfte werden geometrisch (vektoriell) addiert, und zwar

zwei Kräfte mit dem Kräfteparallelogramm oder Kräfte-dreieck (Bild 3), mehrere Kräfte mit dem Kräftepolygon oder Kräfte-keck (Bild 4, Kräftemaßstab 1 cm ≙ xN). Die rechnerische Lösung lautet

$$F_R = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n F_{ix} e_x + \sum_{i=1}^n F_{iy} e_y \quad (6)$$

$$= F_{Rx} e_x + F_{Ry} e_y$$

mit $F_{ix} = F_i \cos \alpha_i$, $F_{iy} = F_i \sin \alpha_i$. Größe und Richtung der Resultierenden:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}, \quad \tan \alpha_R = F_{Ry} / F_{Rx} \quad (7)$$

Zerlegen einer Kraft ist in der Ebene eindeutig nur nach zwei Richtungen möglich, nach drei und mehr Richtungen ist die Lösung vieldeutig (statisch unbestimmt). Graphische Lösung s. Bild 5 a, b.

Rechnerische Lösung (Bild 5 c): $F = F_1 + F_2$ bzw. in Komponenten

$$F \cos \alpha = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2,$$

$$F \sin \alpha = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2;$$

d. h. $F_2 = (F \sin \alpha - F_1 \sin \alpha_1) / \sin \alpha_2$ und somit

$$F \cos \alpha = F_1 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 (F \sin \alpha - F_1 \sin \alpha_1) / \sin \alpha_2,$$

$$F \cos \alpha \sin \alpha_2 - F \sin \alpha \cos \alpha_2$$

$$= F_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - F_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2,$$

also $F_1 = F \sin(\alpha_2 - \alpha) / \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$ und entsprechend $F_2 = F \sin(\alpha_1 - \alpha) / \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$.

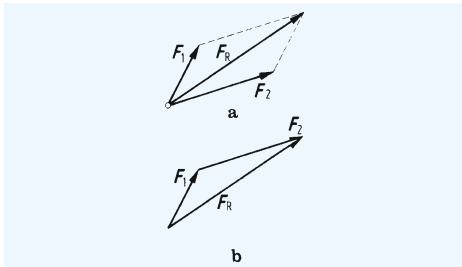


Bild 3. Zusammensetzen zweier Kräfte in der Ebene. a Mit Kräfteparallelogramm; b mit Kräfte-dreieck

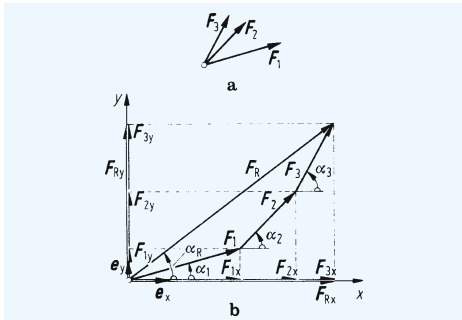


Bild 4. Zusammensetzen mehrerer Kräfte in der Ebene. a Lageplan; b Kräftepolygon

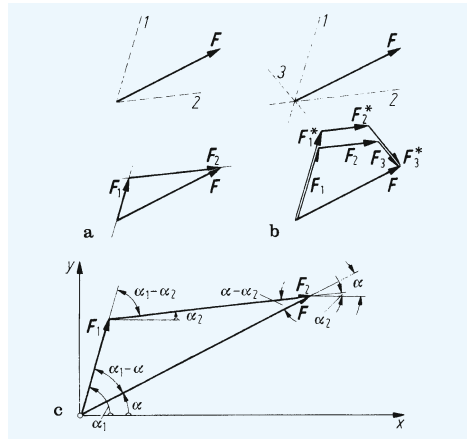


Bild 5. Zerlegen einer Kraft in der Ebene. a In zwei Richtungen (eindeutig); b in drei Richtungen (vieldeutig); c rechnerisch

B1.2.2 Räumliche Kräftegruppe

Zusammensetzen von Kräften zu einer Resultierenden. Die rechnerische Lösung lautet

$$F_R = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n F_{ix} e_x + \sum_{i=1}^n F_{iy} e_y + \sum_{i=1}^n F_{iz} e_z \quad (8)$$

$$= F_{Rx} e_x + F_{Ry} e_y + F_{Rz} e_z;$$

mit $F_{ix} = F_i \cos \alpha_i$, $F_{iy} = F_i \cos \beta_i$, $F_{iz} = F_i \cos \gamma_i$. Größe und Richtung der Resultierenden:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2}; \quad (9)$$

$$\cos \alpha_R = F_{Rx} / F_R, \quad \cos \beta_R = F_{Ry} / F_R, \quad \cos \gamma_R = F_{Rz} / F_R.$$

Zerlegen einer Kraft ist im Raum eindeutig nur nach drei Richtungen möglich; nach vier und mehr Richtungen ist die Lösung vieldeutig (statisch unbestimmt).

Die rechnerische Lösung lautet $F_1 + F_2 + F_3 = F$; $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_x$, $F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = F_y$, $F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = F_z$. Gemäß Bild 6 gilt für die Richtungskosinusse der drei gegebenen Richtungen

$$\cos \alpha_i = x_i / \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

$$\cos \beta_i = y_i / \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

$$\cos \gamma_i = z_i / \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}.$$

Damit folgt

$$F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 = F \cos \alpha,$$

$$F_1 \cos \beta_1 + F_2 \cos \beta_2 + F_3 \cos \beta_3 = F \cos \beta,$$

$$F_1 \cos \gamma_1 + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3 = F \cos \gamma.$$

Diese drei linearen Gleichungen für die drei unbekannt Kräfte F_1 , F_2 und F_3 haben nur dann eine eindeutige Lösung, wenn ihre Systemdeterminante nicht null wird, d. h., wenn die drei Richtungsvektoren nicht in einer Ebene liegen. Gemäß Bild 6 gilt $F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3 = F$ und nach Multiplikation mit $e_2 \times e_3$

$$F_1 e_1 (e_2 \times e_3) + F_2 e_2 (e_2 \times e_3) + F_3 e_3 (e_2 \times e_3) = F (e_2 \times e_3).$$

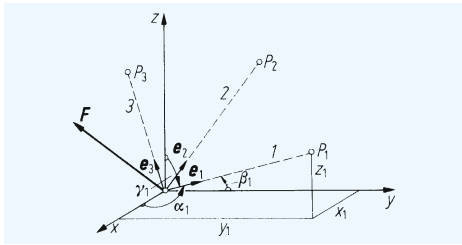


Bild 6. Rechnerische Zerlegung einer Kraft im Raum

Da der Vektor $(e_2 \times e_3)$ sowohl auf e_2 als auch auf e_3 senkrecht steht, werden die Skalarprodukte null, und es folgt

$$\begin{aligned} F_1 e_1 (e_2 \times e_3) &= F (e_2 \times e_3) \quad \text{bzw.} \\ F_1 &= F e_2 e_3 / (e_1 e_2 e_3), \\ F_2 &= e_1 F e_3 / (e_1 e_2 e_3), \\ F_3 &= e_1 e_2 F / (e_1 e_2 e_3). \end{aligned} \quad (10)$$

$F e_2 e_3, e_1 e_2 e_3$ usw. sind Spatprodukte, d.h. Skalare, deren Größe der Rauminhalt des von drei Vektoren gebildeten Spats festlegt. Die Lösung ist eindeutig, wenn das Spatprodukt $e_1 e_2 e_3 \neq 0$ ist, d.h., die drei Vektoren dürfen nicht in einer Ebene liegen.

Mit $e_i = \cos \alpha_i e_x + \cos \beta_i e_y + \cos \gamma_i e_z$ wird

$$F_1 = \begin{vmatrix} F \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ F \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ F \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Entsprechend F_2 und F_3 .

B1.3 Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten

B1.3.1 Kräfte in der Ebene

Zusammensetzen mehrerer Kräfte zu einer Resultierenden. Rechnerisches Verfahren: Bezüglich des Nullpunkts ergibt die ebene Kräftegruppe eine resultierende Kraft und ein resultierendes (Versetzungs-)Moment (Bild 7 a)

$$\begin{aligned} F_R &= \sum_{i=1}^n F_i, \quad M_R = \sum_{i=1}^n M_i \quad \text{bzw.} \quad F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ F_{Ry} &= \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad M_R = \sum_{i=1}^n (F_{iy} x_i - F_{ix} y_i) = \sum_{i=1}^n F_i h_i. \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Punkt ist die Wirkung der Kräftegruppe gleich ihrer Resultierenden. Wird die Resultierende parallel aus dem Nullpunkt soweit verschoben, dass M_R null wird, so folgt für ihre Lage aus $M_R = F_R h_R$ usw. (Bild 7 b)

$$\begin{aligned} h_R &= M_R / F_R \quad \text{bzw.} \quad x_R = M_R / F_{Ry} \quad \text{bzw.} \\ y_R &= -M_R / F_{Rx}. \end{aligned}$$

Zerlegen einer Kraft. Die Zerlegung einer Kraft ist in der Ebene eindeutig möglich nach drei gegebenen Richtungen, die sich nicht in einem Punkt schneiden und von denen höchstens zwei parallel sein dürfen.

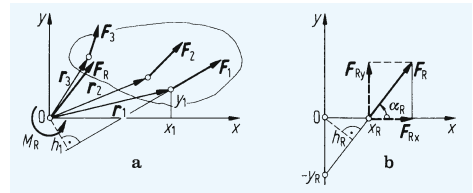


Bild 7. Resultierende von Kräften in der Ebene

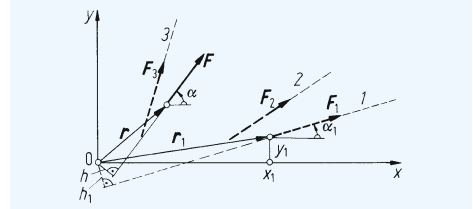


Bild 8. Zerlegen einer Kraft in der Ebene

Die rechnerische Lösung folgt aus der Bedingung dass Kraft- und Momentenwirkung der Einzelkräfte F_i und der Kraft F bezüglich des Nullpunkts gleich sein müssen (Bild 8):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i &= F, \quad \sum_{i=1}^n (r_i \times F_i) = r \times F, \quad \text{d.h.} \\ F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 &= F \cos \alpha, \\ F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3 &= F \sin \alpha; \\ F_1 (x_1 \sin \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1) + F_2 (x_2 \sin \alpha_2 - y_2 \cos \alpha_2) \\ &+ F_3 (x_3 \sin \alpha_3 - y_3 \cos \alpha_3) = F (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \end{aligned}$$

oder an Stelle der letzten Gleichung $F_1 h_1 + F_2 h_2 + F_3 h_3 = F h$, wobei entgegen dem Uhrzeigersinn drehende Momente positiv sind. Das sind drei Gleichungen für die drei Unbekannten F_1, F_2, F_3 .

B1.3.2 Kräfte im Raum

Kräftezusammenfassung (Reduktion). Eine räumliche Kräftegruppe, bestehend aus den Kräften $F_i = (F_{ix}; F_{iy}; F_{iz})$, deren Angriffspunkte durch die Radiusvektoren $r_i = (x_i; y_i; z_i)$ gegeben sind, kann bezüglich eines beliebigen Punkts zu einer resultierenden Kraft F_R und zu einem resultierenden Moment M_R zusammengefasst (reduziert) werden. Die rechnerische Lösung (Bild 9) lautet, bezogen auf den Nullpunkt

$$\begin{aligned} F_R &= \sum_{i=1}^n F_i, \\ M_R &= \sum_{i=1}^n (r_i \times F_i) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Kraftschraube oder Dyname. Eine weitere Vereinfachung des reduzierten Kräftesystems ist insofern möglich, als es eine Achse mit bestimmter Lage gibt, auf der Kraftvektor und Momentvektor parallel zueinander liegen (Bild 10). Diese Achse heißt Zentralachse. Sie ergibt sich durch Zerlegen von M_R in der durch M_R und F_R gebildeten Ebene E in die Komponenten $M_F = M_R \cos \varphi$ (parallel zu F_R) und $M_S = M_R \sin \varphi$ (senkrecht zu F_R). Hierbei folgt φ aus dem Skalarprodukt $M_R \cdot F_R = M_R F_R \cos \varphi$, d.h. $\cos \varphi = M_R \cdot F_R / (M_R F_R)$. Anschließend wird M_S durch Versetzen von F_R senkrecht zur

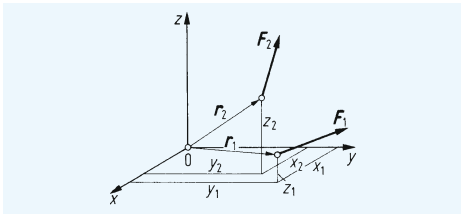


Bild 9. Räumliche Kräftezerlegung

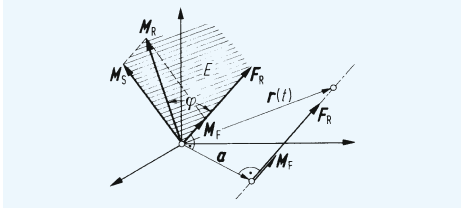


Bild 10. Kraftschraube (Dynam)

Ebene E um den Betrag $a = M_S/F_R$ zu null gemacht. Der dazu gehörige Vektor ist $a = (F_R \times M_R)/F_R^2$, da sein Betrag $|a| = a = F_R M_R \sin \varphi / F_R^2 = M_S/F_R$ ist. Die Vektorgleichung der Zentralachse, in deren Richtung F_R und M_F wirken, lautet dann mit t als Parameter $r(t) = a + F_R \cdot t$.

Kraftzerlegung im Raum. Eine Kraft lässt sich im Raum nach sechs gegebenen Richtungen eindeutig zerlegen. Sind die Richtungen durch ihre Richtungskosinus gegeben und heißen die Kräfte $F_1 \dots F_6$, so gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 F_i \cos \alpha_i &= F \cos \alpha, & \sum_{i=1}^6 F_i \cos \beta_i &= F \cos \beta, \\ \sum_{i=1}^6 F_i \cos \gamma_i &= F \cos \gamma; \\ \sum_{i=1}^6 F_i (y_i \cos \gamma_i - z_i \cos \beta_i) &= F (y \cos \gamma - z \cos \beta), \\ \sum_{i=1}^6 F_i (z_i \cos \alpha_i - x_i \cos \gamma_i) &= F (z \cos \alpha - x \cos \gamma), \\ \sum_{i=1}^6 F_i (x_i \cos \beta_i - y_i \cos \alpha_i) &= F (x \cos \beta - y \cos \alpha). \end{aligned}$$

Aus diesen sechs linearen Gleichungen erhält man eine eindeutige Lösung, wenn die Nennerdeterminante ungleich null ist.

B1.4 Gleichgewicht und Gleichgewichtsbedingungen

Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn er sich in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung befindet. Da dann alle Beschleunigungen null sind, folgt aus den Grundgesetzen der Dynamik, dass am Körper keine resultierende Kraft und kein resultierendes Moment auftreten.

B1.4.1 Kräftesystem im Raum

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$F_R = \sum F_i = 0 \quad \text{und} \quad M_R = \sum M_i = 0 \quad (12)$$

bzw. in Komponenten

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, & \sum F_{iy} &= 0, & \sum F_{iz} &= 0; \\ \sum M_{ix} &= 0, & \sum M_{iy} &= 0, & \sum M_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Jede der drei Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte kann durch eine weitere für die Momente um eine beliebige andere Achse, die nicht durch den Ursprung O gehen darf, ersetzt werden.

Aus den sechs Gleichgewichtsbedingungen lassen sich sechs unbekannte Größen (Kräfte oder Momente) berechnen. Sind mehr als sechs Unbekannte vorhanden, nennt man das Problem statisch unbestimmt. Seine Lösung ist nur unter Heranziehung der Verformungen möglich (s. C2.7). Liegen Kräfte mit *gemeinsamem Angriffspunkt* vor, so sind die Momentenbedingungen von Gl. (13) bezüglich des Schnittpunkts (und damit auch für alle anderen Punkte, da M_R ein freier Vektor ist) identisch erfüllt. Dann gelten nur die Kräftegleichgewichtsbedingungen von Gl. (13), aus denen drei unbekannte Kräfte ermittelt werden können.

B1.4.2 Kräftesystem in der Ebene

Das Gleichungssystem (13) reduziert sich auf drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_{iz} = 0. \quad (14)$$

Die beiden Kräftegleichgewichtsbedingungen können durch zwei weitere Momentenbedingungen ersetzt werden. Die drei Bezugspunkte für die drei Momentengleichungen dürfen nicht auf einer Geraden liegen. Aus den drei Gleichgewichtsbedingungen der Ebene lassen sich drei unbekannte Größen (Kräfte oder Momente) ermitteln. Sind mehr Unbekannte vorhanden, so ist das ebene Problem statisch unbestimmt.

Für *Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt in der Ebene* ist die Momentenbedingung in Gl. (14) identisch erfüllt, es bleiben nur die beiden Kräftebedingungen

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0. \quad (15)$$

B1.4.3 Prinzip der virtuellen Arbeiten

Das Prinzip tritt an die Stelle der Gleichgewichtsbedingungen und lautet: Erteilt man einem starren Körper eine mit seinen geometrischen Bindungen verträgliche kleine (virtuelle) Verschiebung, und ist der Körper im Gleichgewicht (Bild 11), so ist die virtuelle Gesamtarbeit aller eingepprägten äußeren Kräfte und Momente – durch (e) hochgestellt gekennzeichnet – gleich null:

$$\delta W^{(e)} = \sum F_i^{(e)} \delta r_i + \sum M_i^{(e)} \delta \varphi_i = 0 \quad (16)$$

bzw. in Komponenten

$$\begin{aligned} \delta W^{(e)} &= \sum (F_{ix}^{(e)} \delta x_i + F_{iy}^{(e)} \delta y_i + F_{iz}^{(e)} \delta z_i) \\ &+ \sum (M_{ix}^{(e)} \delta \varphi_{ix} + M_{iy}^{(e)} \delta \varphi_{iy} + M_{iz}^{(e)} \delta \varphi_{iz}) = 0; \end{aligned}$$

$r_i = (x_i; y_i; z_i)$ Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten; $\delta r_i = (\delta x_i; \delta y_i; \delta z_i)$ Variationen (mathematisch ausgedrückt Vektordifferentiale) der Ortsvektoren, die sich durch Bildung der ersten Ableitung ergeben; $\delta \varphi_i$ Drehwinkeldifferentiale der Verdrehungen φ_i .

In natürlichen Koordinaten nimmt das Prinzip die Form

$$\delta W^{(e)} = \sum F_{is}^{(e)} \delta s_i + \sum M_{i\varphi}^{(e)} \delta \varphi_i = 0 \quad (17)$$

an, wobei $F_{is}^{(e)}$ die in die Richtung der Verschiebung zeigenden Kraftkomponenten und $M_{i\varphi}^{(e)}$ die um die Drehachse wirksamen



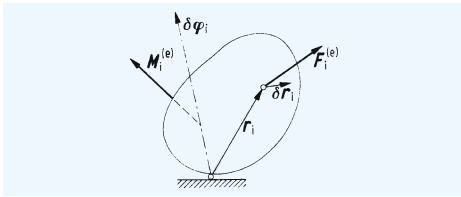


Bild 11. Prinzip virtueller Verrückungen

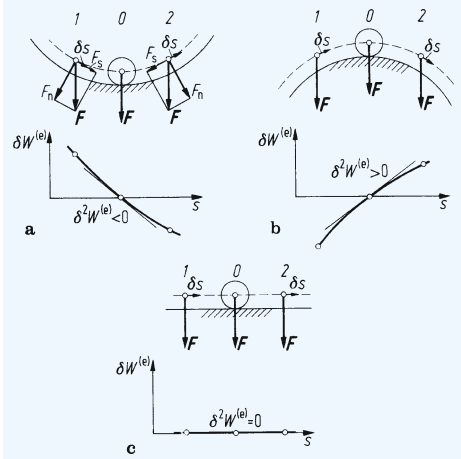


Bild 12. Gleichgewichtsarten. a) Stabil; b) labil; c) indifferent

Komponenten der Momente sind. Das Prinzip dient unter anderem in der Statik zur Untersuchung des Gleichgewichts an verschieblichen Systemen und zur Berechnung des Einflusses von Wanderlasten auf Schnitt- und Auflagerkräfte (Einflusslinien).

B1.4.4 Arten des Gleichgewichts

Man unterscheidet stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht (s. Bild 12). Stabiles Gleichgewicht herrscht, wenn ein Körper bei einer mit seinen geometrischen Bindungen verträglichen Verschiebung in seine Ausgangslage zurückzukehren trachtet, labiles Gleichgewicht, wenn er sie zu verlassen sucht, und indifferentes Gleichgewicht, wenn jede benachbarte Lage eine neue Gleichgewichtslage ist. Wird entsprechend B1.4.3 die kleine Verschiebung als virtuelle aufgefasst, so gilt nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten für die Gleichgewichtslage $\delta W^{(e)} = 0$. Bewegt man den Körper gemäß Bild 12 a aus einer Lage 1 in eine Lage 2 über die Gleichgewichtslage 0 hinweg, so ist im Bereich 1 bis 0 die Arbeit $\delta W^{(e)} = F_s \delta s > 0$, d. h. positiv, im Bereich 0 bis 2 $\delta W^{(e)} < 0$, d. h. negativ. Aus der Funktion $\delta W^{(e)} = f(s)$ geht hervor, dass die Steigung von $\delta W^{(e)}$ negativ ist, d. h. $\delta^2 W^{(e)} < 0$, wenn stabiles Gleichgewicht. Allgemein gilt für das Gleichgewicht: stabil $\delta^2 W^{(e)} < 0$, labil $\delta^2 W^{(e)} > 0$, indifferent $\delta^2 W^{(e)} = 0$. Handelt es sich um Probleme, bei denen nur Gewichtskräfte eine Rolle spielen, dann gilt mit dem Potential $U = F_G z$ bzw. $\delta U = F_G \delta z$

$$\delta W^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)} \delta \mathbf{r} = (0; 0; -F_G)(\delta x; \delta y; \delta z) = -F_G \delta z = -\delta U$$

und $\delta^2 W^{(e)} = -\delta^2 U$, d. h., bei stabilem Gleichgewicht ist $\delta^2 U > 0$ und somit die potentielle Energie U ein Minimum,

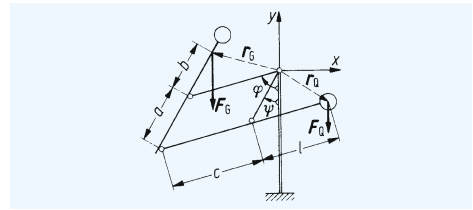


Bild 13. Zeichenmaschine

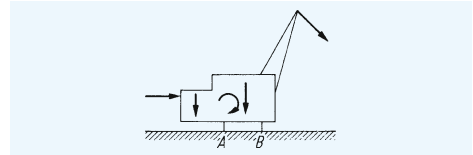


Bild 14. Standsicherheit

bei labilem Gleichgewicht $\delta^2 U < 0$ und die potentielle Energie ein Maximum.

Beispiel: Bei einer Zeichenmaschine sind Gegengewicht F_Q und sein Hebelarm l so zu bestimmen, dass sich die Zeichenmaschine vom Eigengewicht F_G in jeder Lage im Gleichgewicht befindet (Bild 13). – Das System hat zwei verschiedene Freiheitsgrade φ und ψ .

$$\begin{aligned} r_G &= (-c \sin \varphi + b \sin \psi; b \cos \psi - c \cos \varphi), \\ r_Q &= (l \sin \varphi - a \sin \psi; -a \cos \psi + l \cos \varphi), \\ \delta r_G &= (-c \cos \varphi \delta \varphi + b \cos \psi \delta \psi; -b \sin \psi \delta \psi + c \sin \varphi \delta \varphi), \\ \delta r_Q &= (l \cos \varphi \delta \varphi - a \cos \psi \delta \psi; a \sin \psi \delta \psi - l \sin \varphi \delta \varphi). \end{aligned}$$

Mit $F_G = (0; -F_G)$ und $F_Q = (0; -F_Q)$ wird

$$\begin{aligned} \delta W^{(e)} &= \sum F_i^{(e)} \delta r_i = -F_G(-b \sin \psi \delta \psi + c \sin \varphi \delta \varphi) \\ &\quad - F_Q(a \sin \psi \delta \psi - l \sin \varphi \delta \varphi) \\ &= \sin \psi \delta \psi (F_G b - F_Q a) + \sin \varphi \delta \varphi (-F_G c + F_Q l). \end{aligned}$$

Aus $\delta W^{(e)} = 0$ folgt wegen der Beliebigkeit von φ und ψ

$$F_G b - F_Q a = 0 \quad \text{und} \quad -F_G c + F_Q l = 0$$

und damit

$$F_Q = F_G b / a \quad \text{und} \quad l = c \quad F_G / F_Q = ca / b.$$

Ferner wird

$$\delta^2 W^{(e)} = \cos \psi \delta \psi^2 (F_G b - F_Q a) + \cos \varphi \delta \varphi^2 (-F_G c + F_Q l).$$

Hieraus folgt mit den ermittelten Lösungswerten $\delta^2 W^{(e)} = 0$, d. h., es liegt indifferentes Gleichgewicht vor.

B1.4.5 Standsicherheit

Bei Körpern, deren Auflagerungen nur Druckkräfte aufnehmen können, besteht die Gefahr des Umkippens. Es wird verhindert, wenn um die möglichen Kippkanten A oder B (Bild 14) die Summe der Standmomente größer ist als die Summe der Kippmomente, d. h., wenn die Resultierende des Kräftesystems innerhalb der Kippkanten die Standfläche schneidet. Standsicherheit ist das Verhältnis der Summe aller Standmomente zur Summe aller Kippmomente bezüglich einer Kippkante: $S = \sum M_S / \sum M_K$. Für $S \geq 1$ herrscht Standsicherheit und Gleichgewicht.

B1.5 Lagerungsarten, Freimachungsprinzip

Körper werden durch sog. Lager abgestützt. Die Stützkräfte wirken als Reaktionskräfte zu den äußeren eingepägten Kräften auf den Körper. Je nach Bauart der Lager können im räumlichen Fall maximal drei Kräfte und maximal drei Momente übertragen werden. Die Reaktionskräfte und -momente werden durch das sogenannte „Freimachen“ eines Körpers zu äußeren Kräften. Ein Körper wird freigemacht, indem man ihn mittels eines geschlossenen Schnitts durch **alle** Lager von seiner Umgebung trennt und die Lagerkräfte als äußere Kräfte am Körper anbringt (**Bild 15**, Freimachungsprinzip). Auf die Lager wirken dann nach „*actio = reactio*“ (3. Newton'sches Axiom) gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte. Je nach Bauart und Anzahl der Reaktionsgrößen eines Lagers unterscheidet man ein- bis sechswertige Lager (**Bild 16**).

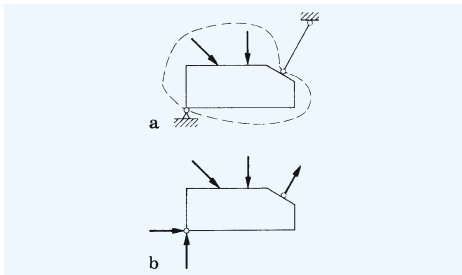


Bild 15. Freimachungsprinzip. **a** Gestützter Körper mit geschlossener Schnittlinie; **b** freigemachter Körper

Bauart	Symbol	Reaktionsgrößen		Wertigkeit
		in der Ebene	im Raum	
Loslager:				
Querlager		F_{Ay}	F_{Ay}, F_{Az}	1 2
Gleitlager		F_{Ay}	F_{Az}	1 1
Rollenlager		F_{Ay}	$(F_{Ay}), F_{Az}$	1 1 (2)
Pendelstab, Seil		F_A	F_A	1 1
Festlager:				
Quer- und Längslager		F_{Ax}, F_{Ay}	F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}	2 3
festes Gelenk		F_{Ax}, F_{Ay}	F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}	2 3
feste Einspannung		F_{Ax}, F_{Ay}, M_E	M_{Ex}, M_{Ey}, M_{Ez} F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}	3 6

Bild 16. Lagerungsarten

B1.6 Auflagerreaktionen an Körpern

B1.6.1 Körper in der Ebene

In der Ebene hat ein Körper drei Freiheitsgrade hinsichtlich seiner Bewegungsmöglichkeiten (Verschiebung in x - und y -Richtung, Drehung um die z -Achse). Er benötigt daher eine insgesamt dreiwertige Lagerung für eine stabile und statisch bestimmte Festhaltung. Diese kann aus einer festen Einspannung oder aus einem Fest- und einem Loslager oder aus drei Loslagern (Gleitlagern) bestehen (im letzten Fall dürfen sich die drei Wirkungslinien der Reaktionskräfte nicht in einem Punkt schneiden). Ist die Lagerung n -wertig ($n > 3$), so ist das System $(n - 3)$ fach statisch unbestimmt gelagert. Ist die Lagerung weniger als dreiwertig, so ist das System statisch unterbestimmt, d. h. instabil und beweglich. Die Berechnung der Auflagerreaktionen erfolgt durch Freimachen und Ansetzen der Gleichgewichtsbedingungen.

Beispiel: Welle (**Bild 17 a**). Gesucht werden die Auflagerkräfte in A und B infolge der gegebenen Kräfte F_1 und F_2 .

Rechnerische Lösung: An der freigemachten Welle (**Bild 17 b**) gilt

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} = 0 &= -F_1 a + F_B l - F_2(l + c) \quad \text{also} \\ F_B &= [F_1 a + F_2(l + c)]/l; \\ \sum M_{iB} = 0 &= -F_{Ay} l + F_1 b - F_2 c, \quad \text{also} \\ F_{Ay} &= (F_1 b - F_2 c)/l; \\ \sum F_{ix} = 0 &= F_{Ax}. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\sum F_{iy} = 0$ muss ebenfalls erfüllt sein und kann als Kontrollgleichung benutzt werden.

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} = F_{Ay} - F_1 + F_B - F_2 \\ = (F_1 b - F_2 c)/l - F_1 + [F_1 a + F_2(l + c)]/l - F_2 \\ = F_1(a + b - l)/l + F_2(-c + l + c - l)/l = 0. \end{aligned}$$

Beispiel: Abgewinkelter Träger (**Bild 18 a**). Für den durch zwei Einzelkräfte F_1 und F_2 und die konstante Streckenlast q belasteten abgewinkelten Träger ist die Auflagerkraft im Festlager A und die Kraft im Pendelstab bei B zu bestimmen.

Rechnerische Lösung: Mit der Resultierenden der Streckenlast $F_q = qc$ wird (**Bild 18 b**)

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} = 0 &= -F_1 \sin\alpha_1 a - qc(a + b + c/2) \\ &\quad - F_2 e + F_S \cos\alpha_S l + F_S \sin\alpha_S h \end{aligned}$$

und daraus

$$F_S = [F_1 \sin\alpha_1 a + qc(a + b + c/2) + F_2 e]/(l \cos\alpha_S + h \sin\alpha_S).$$

Aus

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 &= F_{Ax} + F_1 \cos\alpha_1 + F_2 - F_S \sin\alpha_S \quad \text{und} \\ \sum F_{iy} = 0 &= F_{Ay} - F_1 \sin\alpha_1 - qc + F_S \cos\alpha_S \end{aligned}$$

folgen

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= -F_1 \cos\alpha_1 - F_2 + F_S \sin\alpha_S \quad \text{und} \\ F_{Ay} &= F_1 \sin\alpha_1 + qc - F_S \cos\alpha_S, \end{aligned}$$

wobei der vorstehend errechnete Wert für F_S einzusetzen ist.

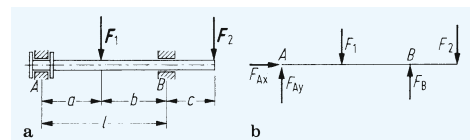


Bild 17. Welle. **a** System; **b** Freimachung

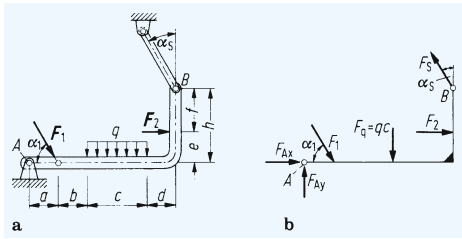


Bild 18. Abgewinkelter Träger. a System; b Freimachung

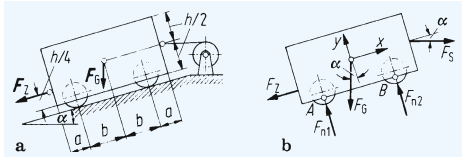


Bild 19. Wagen auf schiefer Ebene. a System; b Freimachung

Beispiel: Wagen auf schiefer Ebene (Bild 19 a, b). Der durch die Gewichtskraft F_G und die Anhängierzugkraft F_Z belastete Wagen wird von einer Seilwinde auf der schiefer Ebene im Gleichgewicht gehalten. Zu bestimmen sind die Zugkraft im Halteseil sowie die Stützkkräfte an den Rädern, wobei Reibkräfte außer acht gelassen werden sollen. *Rechnerische Lösung:* Am freigmachten Wagen (Bild 19 b) ergeben die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 &= -F_Z - F_G \sin \alpha + F_S \cos \alpha, \quad \text{also} \\ F_S &= F_G \tan \alpha + F_Z / \cos \alpha; \\ \sum M_{iA} = 0 &= F_Z h / 4 + F_G (h / 2) \sin \alpha - F_G b \cos \alpha + 2 F_{n2} b \\ &\quad - F_S (h / 2) \cos \alpha - F_S (a + 2b) \sin \alpha; \\ \sum M_{iB} = 0 &= F_Z h / 4 - 2 F_{n1} b + F_G (h / 2) \sin \alpha + F_G b \cos \alpha \\ &\quad - F_S (h / 2) \cos \alpha - F_S a \sin \alpha. \end{aligned}$$

Hieraus folgen

$$\begin{aligned} F_{n2} &= -F_Z h / (8b) - F_G [(h / 2) \sin \alpha - b \cos \alpha] / (2b) \\ &\quad + F_S [(h / 2) \cos \alpha + (a + 2b) \sin \alpha] / (2b) \quad \text{und} \\ F_{n1} &= F_Z h / (8b) + F_G [(h / 2) \sin \alpha + b \cos \alpha] / (2b) \\ &\quad - F_S [(h / 2) \cos \alpha + a \sin \alpha] / (2b), \end{aligned}$$

wobei der errechnete Wert von F_S einzusetzen ist. Die Bedingung $\sum F_{iy} = 0 = F_{n1} + F_{n2} - F_G \cos \alpha - F_S \sin \alpha$ kann dann als Kontrollgleichung benutzt werden.

B1.6.2 Körper im Raum

Im Raum hat ein Körper sechs Freiheitsgrade (drei Verschiebungen und drei Drehungen). Er benötigt daher für eine stabile Festhaltung eine insgesamt sechswertige Lagerung. Ist die Lagerung n -wertig ($n > 6$), so ist das System ($n - 6$)fach statisch unbestimmt gelagert. Ist $n < 6$, so ist es statisch unterbestimmt, also beweglich und instabil.

Beispiel: Welle mit Schrägverzahnung (Bild 20). Die Auflagerkräfte der Welle sind zu berechnen. – Die Welle kann sich um die x -Achse

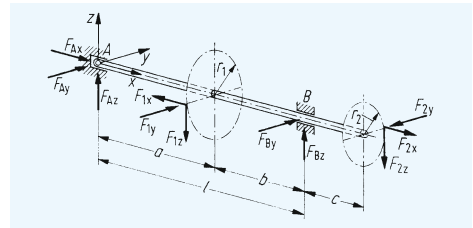


Bild 20. Welle mit Schrägverzahnung

drehen, d. h. $\sum M_{ix} = 0$ entfällt. (Lagerreibung wird nicht berücksichtigt.) Die restlichen fünf Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 &\text{ ergibt } F_{Ax} = F_{1x} - F_{2x}; \\ \sum M_{iBz} = 0 &\text{ ergibt } F_{Ay} = -(F_{1x} r_1 + F_{1y} b \\ &\quad + F_{2x} r_2 + F_{2y} c) / l; \\ \sum M_{iBy} = 0 &\text{ ergibt } F_{Az} = (F_{1z} b - F_{2z} c) / l; \\ \sum M_{iAz} = 0 &\text{ ergibt } F_{By} = [F_{1x} r_1 - F_{1y} a + F_{2x} r_2 \\ &\quad + F_{2y} (l + c)] / l; \\ \sum M_{iAy} = 0 &\text{ ergibt } F_{Bz} = [F_{1z} a + F_{2z} (l + c)] / l. \end{aligned}$$

Die Bedingungen $\sum F_{iy} = 0$ und $\sum F_{iz} = 0$ können als Kontrollen verwendet werden.

B1.7 Systeme starrer Körper

Sie bestehen aus mehreren Körpern, die durch Verbindungselemente, d. h. Gelenke a oder Führungen b oder auch durch gelenkig angeschlossene Führungen c , miteinander verbunden sind (Bild 21). Ein Gelenk überträgt Kräfte in zwei Richtungen, aber kein Moment; eine Führung überträgt eine Kraft quer zur Führung und ein Moment, aber keine Kraft parallel zur Führung; eine gelenkige Führung überträgt eine Kraft quer zur Führung, aber keine Kraft parallel zur Führung und kein Moment. Man spricht daher von zweiwertigen oder einwertigen Verbindungselementen. Ist i die Summe der Wertigkeiten der Auflager und j die Summe der Wertigkeiten der Verbindungselemente, so muss bei einem System aus k Körpern mit $3k$ Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene die Bedingung $i + j = 3k$ erfüllt sein, wenn ein stabiles System statisch bestimmt sein soll.

Ist $i + j > 3k$, so ist das System statisch unbestimmt, d. h., wenn $i + j = 3k + n$, ist es n -fach statisch unbestimmt. Ist $i + j < 3k$, so ist das System statisch unterbestimmt und auf jeden Fall labil. Für das stabile System nach Bild 21 ist $i + j = 7 + 5 = 12$ und $3k = 3 \cdot 4 = 12$, d. h., das System ist statisch bestimmt. Bei statisch bestimmten Systemen werden die Auflagerreaktionen und Reaktionen in den Verbindungselementen ermittelt, indem die Gleichgewichtsbedingungen für die freigmachten Einzelkörper erfüllt werden.

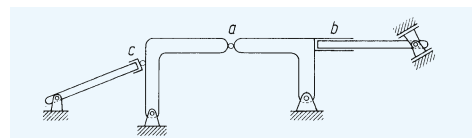


Bild 21. System aus starren Körpern

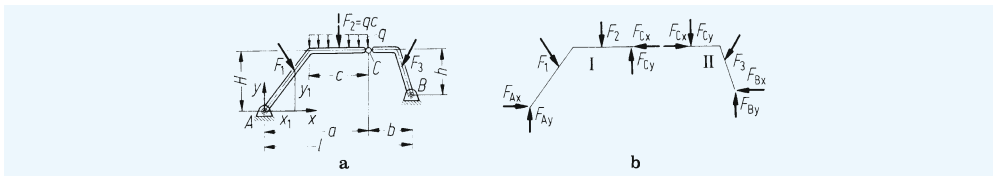


Bild 22. Dreigelenkrahmen. **a** System; **b** Freimachung

Beispiel: Dreigelenkrahmen oder Dreigelenkbogen (**Bild 22 a**).
Rechnerische Lösung: Nach Freimachen der beiden Einzelkörper (**Bild 22 b**) Gleichgewichtsbedingungen für Körper I:

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ ergibt } F_{Ax} = F_{Cx} - F_{1x}; \quad (18a)$$

$$\sum F_{iy} = 0 \text{ ergibt } F_{Ay} = F_{1y} + F_2 - F_{Cy}; \quad (18b)$$

$$\sum M_{iA} = 0 = F_{Cx}h + F_{Cy}a - F_{1x}y_1 - F_{1y}x_1 - F_2x_2; \quad (18c)$$

und für Körper II:

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ ergibt } F_{Bx} = F_{Cx} - F_{3x}; \quad (18d)$$

$$\sum F_{iy} = 0 \text{ ergibt } F_{By} = F_{Cy} + F_{3y}; \quad (18e)$$

$$\sum M_{iB} = 0 = -F_{Cx}h + F_{Cy}b + F_{3x}[y_3 - (H - h)] + F_{3y}(l - x_3). \quad (18f)$$

Aus den Gln. (18c und f) ergeben sich die Gelenkkräfte F_{Cx} und F_{Cy} , eingesetzt in die Gln. (18a, b, d und e) dann die Auflagerkräfte F_{Ax} , F_{Ay} , F_{Bx} , F_{By} . Zur Kontrolle verwendet man $\sum M_{iC} = 0$ am Gesamtsystem.

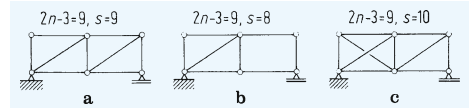


Bild 23. Fachwerk. **a** Statisch bestimmt; **b** statisch unterbestimmt; **c** statisch unbestimmt

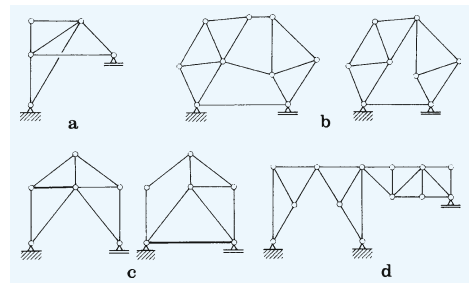


Bild 24. Fachwerke. **a** bis **d** zum 1. bis 4. Bildungsgesetz

B1.8 Fachwerke

B1.8.1 Ebene Fachwerke

Fachwerke bestehen aus Stäben, die in den Knotenpunkten als gelenkig miteinander verbunden angesehen werden. Die Gelenke werden als reibungsfrei angenommen, d.h., es werden nur Kräfte in Stabrichtung übertragen. Die in Wirklichkeit in den Knotenpunkten vorhandenen Reibungsmomente und biegesteifen Anschlüsse führen zu Nebenspannungen, die in der Regel vernachlässigbar sind. Die äußeren Kräfte greifen in den Knotenpunkten an oder werden nach dem Hebelgesetz am Stab auf diese verteilt.

Hat ein Fachwerk n Knoten und s Stäbe und ist es äußerlich statisch bestimmt mit drei Auflagerkräften gelagert, so gilt, da es für jeden Knoten zwei Gleichgewichtsbedingungen gibt, für ein statisch bestimmtes und stabiles Fachwerk (**Bild 23 a**) $2n = s + 3$, $s = 2n - 3$, d.h., aus den $2n - 3$ Gleichgewichtsbedingungen sind s unbekannte Stabkräfte berechenbar. Ein Fachwerk mit $s < 2n - 3$ Stäben ist statisch unterbestimmt und kinematisch instabil (**Bild 23 b**), ein Fachwerk mit $s > 2n - 3$ Stäben ist innerlich statisch unbestimmt (**Bild 23 c**). Für die Bildung statisch bestimmter und stabiler Fachwerke gelten folgende Bildungsgesetze:

- Ausgehend von einem stabilen Grunddreieck werden nacheinander neue Knotenpunkte mit zwei Stäben angeschlossen (**Bild 24 a**).
- Aus zwei statisch bestimmten Fachwerken wird ein neues gebildet durch drei Verbindungsstäbe, deren Wirkungslinien keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben (**Bild 24 b**). Dabei können zwei Stäbe durch einen den beiden Fachwerken gemeinsamen Knoten ersetzt werden (**Bild 24 b, rechts**).
- Durch Stabvertauschung kann jedes nach diesen Regeln gebildete Fachwerk in ein anderes statisch bestimmtes und stabiles umgebildet werden, wenn der Tauschstab zwischen

zwei Punkte eingebaut wird, die sich nach seiner Entfernung gegeneinander bewegen könnten (**Bild 24 c**).

- Aus mehreren stabilen Fachwerken können nach den Regeln der Starrkörpersysteme gemäß **B1.7** neue stabile Fachwerkssysteme gebildet werden (**Bild 24 d**).

Ermittlung der Stabkräfte

Knotenschnittverfahren. Allgemein ergeben sich die s Stabkräfte und die drei Auflagerkräfte für ein statisch bestimmtes Fachwerk nach Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_{ix} = 0$ und $\sum F_{iy} = 0$ an allen durch Rundschnitt freigemachten n Knoten. Man erhält $2n$ lineare Gleichungen. Ist die Nennerdeterminante des Gleichungssystems ungleich null, so ist das Fachwerk stabil, ist sie gleich null, so ist es instabil (verschieblich) [1]. Häufig gibt es (z. B. nachdem man vorher die Auflagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem ermittelt) einen Ausgangsknoten mit nur zwei unbekanntem Stabkräften, dem sich weitere Knoten mit nur jeweils zwei Unbekannten anschließen, so dass sie nacheinander aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können, ohne ein Gleichungssystem lösen zu müssen.

Ritter'sches Schnittverfahren. Ein analytisches Verfahren, bei dem durch Schnitt dreier Stäbe ein ganzer Fachwerkteil freigemacht wird und nach Ansatz der drei Gleichgewichtsbedingungen für diesen Teil die drei unbekanntem Stabkräfte berechnet werden (s. Beispiel auf der nächsten Seite).

Einflusslinien infolge von Wanderlasten

Die Berechnung einer Stabkraft F_{S_j} als Funktion von x infolge einer Wanderlast $F = 1$ liefert die Einflussfunktion $\eta(x)$; ihre graphische Darstellung heißt Einflusslinie. Die Auswer-

tung für mehrere Einzellasten F_j liefert die Stabkraft $F_{S_i} = \sum F_j \eta(x_j)$ (s. Beispiel).

Beispiel: Fachwerkausleger (Bild 25 a). Gegeben: $F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = 10 \text{ kN}$, $F_3 = 20 \text{ kN}$, $a = 2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 33,69^\circ$. Gesucht: Stabkräfte.

Knotenschnittverfahren. Die unbekanntenen Stabkräfte F_{S_i} werden als Zugkräfte positiv angesetzt (Bild 25 b). Für Knoten E gilt:

$$\sum F_{iy} = 0 \text{ ergibt } F_{S_2} = -F_2 / \sin \alpha = -14,14 \text{ kN, also Druck};$$

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ ergibt } F_{S_1} = F_1 - F_{S_2} \cos \alpha = +15,00 \text{ kN, also Zug.}$$

Für Knoten C gilt:

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ ergibt } F_{S_4} = F_{S_1} = +15,00 \text{ kN (Zug);}$$

$$\sum F_{iy} = 0 \text{ ergibt } F_{S_3} = -F_3 = -20,00 \text{ kN (Druck).}$$

Für Knoten D gilt:

$$\sum F_{iy} = 0 \text{ ergibt } F_{S_5} = -(F_{S_2} \sin \alpha + F_{S_3}) / \sin \beta = +54,08 \text{ kN (Zug);}$$

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ ergibt } F_{S_6} = F_{S_2} \cos \alpha - F_{S_5} \cos \beta = -55,00 \text{ kN (Druck).}$$

Für Knoten B gilt:

$$\sum F_{iy} = 0 \text{ ergibt } F_{S_7} = 0;$$

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ ergibt } F_B = -F_{S_6} = 55,00 \text{ kN.}$$

Für Knoten A gilt:

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ ergibt } F_{Ax} = F_{S_4} + F_{S_5} \cos \beta = 60,00 \text{ kN};$$

$$\sum F_{iy} = 0 \text{ ergibt } F_{Ay} = F_{S_5} \sin \beta + F_{S_7} = 30,00 \text{ kN.}$$

Diese Auflagerkräfte folgen auch aus den Gleichgewichtsbedingungen am (ungeschnittenen) Gesamtsystem.

Ritter'scher Schnitt. Die Stabkräfte F_{S_4} , F_{S_5} und F_{S_6} werden durch einen Ritter'schen Schnitt (Bild 25 c) ermittelt.

$$\sum M_{iD} = 0 \text{ ergibt } F_{S_4} = (F_2 a + F_1 h) / h = +15,00 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iA} = 0 \text{ ergibt } F_{S_6} = -(F_2(a+b) + F_3 b) / h = -55,00 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iy} = 0 \text{ ergibt } F_{S_5} = (F_2 + F_3) / \sin \beta = +54,08 \text{ kN}$$

Einflusslinie für Stabkraft F_{S_6} . Untersucht wird der Einfluss einer vertikalen Wanderlast F_y (in beliebiger Stellung x auf dem Obergurt) auf die Stabkraft F_{S_6} (Bild 25 d). Aus

$$\sum M_{iA} = 0 = F_y(a+b-x) + F_{S_6} h$$

folgt mit $F_y = 1$

$$\eta(x) = -1 \cdot (a+b-x) / h = -5/2 + x / (2 \text{ m})$$

also eine Gerade (Bild 25 e). Ihre Auswertung für die gegebenen Lasten liefert, da F_1 keinen Einfluss auf F_{S_6} hat (s. $\sum M_{iA} = 0$),

$$F_{S_6} = F_2 \eta(x=0) + F_3 \eta(x=a) = 10 \text{ kN}(-5/2) + 20 \text{ kN}(-3/2) = -55 \text{ kN.}$$

B1.8.2 Räumliche Fachwerke

Da im Raum pro Knoten drei Gleichgewichtsbedingungen bestehen und sechs Lagerkräfte zur stabilen, statisch bestimmten Lagerung des Gesamtfachwerks erforderlich sind, gilt das Abzählkriterium $3n = s + 6$ bzw. $s = 3n - 6$. Im Übrigen gelten den ebenen Fachwerken analoge Methoden für die Stabkraftberechnung usw. [2].

B1.9 Seile und Ketten

Seile und Ketten werden als biegeweich angesehen, d. h., sie können nur Zugkräfte übertragen. Vernachlässigt man die Längsdehnungen der einzelnen Elemente (Theorie 1. Ordnung), so folgt für das ebene Problem infolge vertikaler Streckenlast aus den Gleichgewichtsbedingungen am Seilelement (Bild 26 a)

bei gegebener Belastung $q(s)$:

$\sum F_{ix} = 0$, d. h. $dF_H = 0$, $\sum F_{iy} = 0$, d. h. $F_V = q(s) ds$, also $F_H = \text{const}$ und $dF_V / ds = q(s)$. Gemäß Bild 26 a gilt ferner $\tan \varphi = y' = F_V / F_H$, d. h. $F_V = F_H y'$ bzw. $F_V' = dF_V / dx = F_H y''$.

Mit $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ wird hieraus

$$dF_V / ds = (dF_V / dx)(dx / ds) = F_H y'' / \sqrt{1 + y'^2} = q(s).$$

Folglich ist

$$y'' = [q(s) / F_H] \sqrt{1 + y'^2}; \tag{19}$$

bei gegebener Belastung $q(x)$: gemäß Bild 26 a gilt $q(x) ds = q(x) dx$, d. h.

$$q(s) = q(x) dx / ds = q(x) \cos \varphi = q(x) / \sqrt{1 + y'^2}$$

und damit nach Gl. (19)

$$y'' = q(x) / F_H. \tag{20}$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen ergeben die Seilkurve $y(x)$. Die dabei auftretenden zwei Integrationskonstanten sowie der unbekannte (konstante) Horizontalzug F_H folgen aus den Randbedingungen $y(x=x_1) = y_1$ und $y(x=x_2) = y_2$ sowie aus der gegebenen Seillänge $L = \int ds = \int \sqrt{1 + y'^2} dx$.

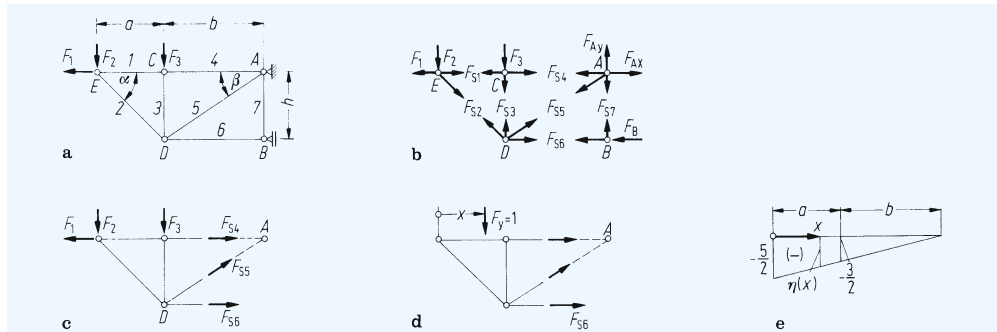


Bild 25. Fachwerkausleger. a System; b Knotenschnitte; c Ritter'scher Schnitt; d Wanderlast; e Einflusslinie

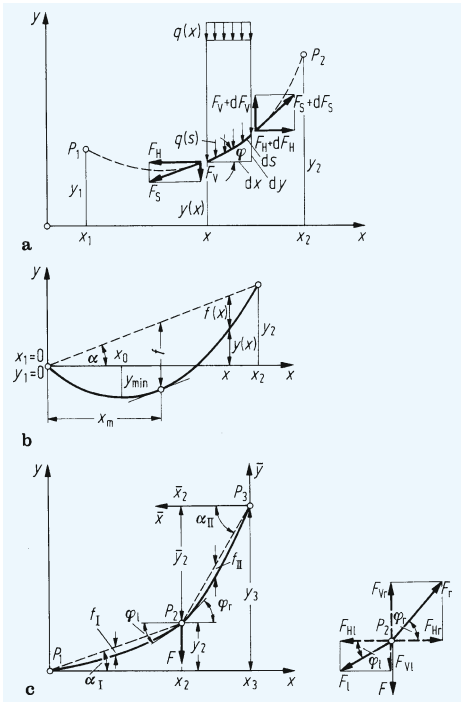


Bild 26. Seil. a Element; b Seil unter Eigengewicht; c Seil unter Einzellast

B1.9.1 Seil unter Eigengewicht (Kettenlinie)

Für ein Seil konstanten Querschnitts folgt mit $q(s) = \text{const} = q$ aus Gl. (19) mit $a = F_H/q$ nach Trennung der Variablen und Integration $\text{arsinh } y' = (x - x_0)/a$ bzw. $y'(x) = \sinh[(x - x_0)/a]$ mit $y(x) = \int \sinh[(x - x_0)/a] dx + y_0$ die Kettenlinie

$$y(x) = y_0 + a \cosh[(x - x_0)/a]. \tag{21}$$

Der Extremwert von $y(x)$ folgt aus $y' = 0$ an der Stelle $x = x_0$ zu $y_{\text{min}} = y_0 + a$. Die unbekanntenen Konstanten x_0, y_0 und $a = F_H/q$ ergeben sich aus den drei Bedingungen (Bild 26 b)

$$y(x_1 = 0) = 0 = y_0 + a \cosh(x_0/a),$$

$$y(x = x_2) = y_2 = y_0 + a \cosh[(x_2 - x_0)/a],$$

$$L = \int_{x=0}^{x_2} \sqrt{1 + \sinh^2[(x - x_0)/a]} dx$$

$$= a \sinh[(x_2 - x_0)/a] + a \sinh(x_0/a).$$

Hieraus ergeben sich

$$y_0 = -a \cosh(x_0/a), \quad x_0 = x_2/2 - a \operatorname{artanh}(y_2/L) \quad \text{und}$$

$$\sinh(x_2/2a) = \sqrt{L^2 - y_2^2}/(2a).$$

Aus der letzten (transzendenten) Gleichung kann a , anschließend können x_0 und y_0 berechnet werden. Der maximale Durchhang f gegenüber der Sehne folgt an der Stelle $x_m = x_0 + a \operatorname{arsinh}(y_2/x_2)$ zu $f = y_2 x_m/x_2 - y(x_m)$. Für die Kräfte gilt

$$F_H = aq = \text{const}, \quad F_V(x) = F_H y'(x), \tag{22}$$

$$F_S(x) = \sqrt{F_H^2 + F_V^2(x)}.$$

Die größte Seilkraft tritt an der Stelle auf, wo y' zum Maximum wird, d. h. in einem der Befestigungspunkte.

Beispiel: Kettenlinie. Befestigungspunkte $P_1(0; 0)$ und $P_2(300\text{m}; -50\text{m})$. Seillänge $L = 340\text{m}$, Belastung $q(s) = 30\text{N/m}$. – Aus der transzendenten Gleichung ergibt sich nach iterativer Rechnung $a = 179,2\text{m}$ und damit $x_0 = 176,5\text{m}$ und $y_0 = -273,4\text{m}$, womit nach Gl. (21) die Kettenlinie bestimmt ist. Der maximale Durchhang gegenüber der Sehne tritt an der Stelle $x_m = 146,8\text{m}$ auf und hat die Größe $f = 67,3\text{m}$. Der Horizontalzug beträgt $F_H = aq = 5,375\text{kN} = \text{const}$. Die größte Seilkraft tritt im Punkt P_1 auf: $F_V(x = 0) = F_H \cdot |y'(x = 0)| = 6,192\text{kN}$ und somit $F_{S,\text{max}} = F_S(x = 0) = 8,20\text{kN}$.

B1.9.2 Seil unter konstanter Streckenlast

Hierunter fallen neben Seilen mit angehängter konstanter Streckenlast $q(x) = \text{const}$ auch solche mit flachem Durchhang unter Eigengewicht, da bei $q(s) = q_0 = \text{const}$ wegen $q(s)\sqrt{1 + y'^2} = q_0/\cos\varphi = q(x)$ mit $\cos\varphi \approx \cos\alpha = \text{const}$ auch $q(x) = \text{const} = q$ wird. Zweimalige Integration der Gl. (20) liefert $y(x) = (q/F_H)x^2/2 + C_1x + C_2$; Randbedingungen mit gegebenem Durchhang f in der Mitte: $y(x_1 = 0) = 0, y(x = x_2) = y_2, y(x = x_2/2) = y_2/2 - f$. Hieraus $C_2 = 0, C_1 = (y_2 - 4f)/x_2, F_H = qx_2^2/(8f)$ und damit $y(x) = (y_2/x_2)x - (4f/x_2^2)(x_2x - x^2) = (y_2/x_2)x - f(x)$, wobei $f(x)$ der Durchhang gegenüber der Sehne ist (Bild 26 b).

Ferner gilt $F_V(x) = F_H y'(x)$ und $F_S(x) = \sqrt{F_H^2 + F_V^2(x)}$; $F_{S,\text{max}}$ an der Stelle der maximalen Steigung. Die Länge L des Seils folgt aus $L = \int_{x=0}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$ mit $a = F_H/q$ zu

$$L = (a/2) \left[(C_1 + x_2/a) \sqrt{1 + (C_1 + x_2/a)^2} + \ln \left(C_1 + x_2/a + \sqrt{1 + (C_1 + x_2/a)^2} \right) - C_1 \sqrt{1 + C_1^2} - \ln \left(C_1 + \sqrt{1 + C_1^2} \right) \right].$$

Für Seile mit flachem Durchhang gilt mit der Sehnenlänge $l = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ die Näherungsformel

$$L \approx l \left[1 + 8x_2^2 f^2 / (3l^4) \right]. \tag{23}$$

Beispiel: Seil mit flachem Durchhang. Das Beispiel aus B1.9.1 werde näherungsweise als flach durchhängendes Seil berechnet. Gegeben: $P_1(0; 0), P_2(300\text{m}; -50\text{m}), f = 67,3\text{m}, q_0 = 30\text{N/m}$. – Aus $\tan\alpha = -50/300$ folgt $\alpha = -9,46^\circ$ und $\cos\alpha = 0,9864$, so dass $q \approx q_0/\cos\alpha = 30,41\text{N/m}$ wird. Es folgen $C_1 = -1,064$ und $F_H = 5,083\text{kN}$. Somit ist die Seillinie

$$y(x) = -0,1667x - 0,003\text{m}^{-1}(300\text{m} \cdot x - x^2)$$

$$= -1,064 \cdot x + 0,003\text{m}^{-1} \cdot x^2.$$

An der Stelle $x = 0$ wird $y'_{\text{max}} = |y'(0)| = 1,064$, also $F_{V,\text{max}} = F_H y'_{\text{max}} = 5,408\text{kN}$ und somit $F_{S,\text{max}} = 7,42\text{kN}$. Die Näherungsformel Gl. (23) für die Seillänge liefert dann mit $l = 304,1\text{m}$ den Wert $L \approx 342,7\text{m}$. Die Ergebnisse zeigen, dass die Näherungslösung von den exakten Werten (B1.9.1) nicht erheblich abweicht, obwohl der „flache“ Durchhang hier nur in geringem Maße zutrifft.

B1.9.3 Seil mit Einzellast

Betrachtet wird nur das Seil mit flachen Durchhängen gegenüber den Sehnen (Bild 26 c, links). Sind x_2, y_2, x_3, y_3 gegeben,



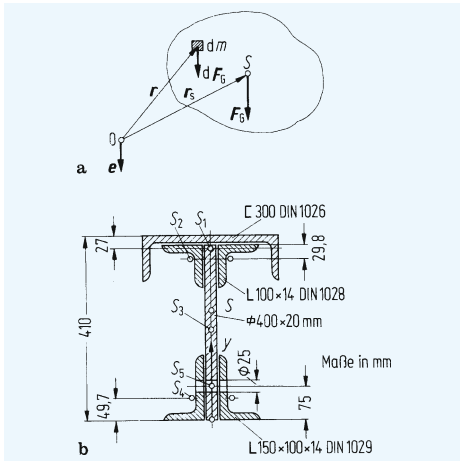


Bild 27. Schwerpunkt eines Körpers (a) und eines Trägerquerschnitts (b)

so gelten mit $F_{HII} = F_{HII} = F_H$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 q_I &= q_0 / \cos\alpha_I, & q_{II} &= q_0 / \cos\alpha_{II}, \\
 f_I &= q_I \bar{x}_I^2 / (8F_H), & f_{II} &= q_{II} \bar{x}_{II}^2 / (8F_H), \\
 y(x) &= (y_2/x_2)x - (q_I/2F_H)(x_2x - x^2), \\
 \bar{y}(\bar{x}) &= (\bar{y}_2/\bar{x}_2)\bar{x} - (q_{II}/2F_H)(\bar{x}_2\bar{x} - \bar{x}^2), \\
 y'(x) &= (y_2/x_2) - (q_I/2F_H)(x_2 - 2x), \\
 \bar{y}'(\bar{x}) &= (\bar{y}_2/\bar{x}_2) - (q_{II}/2F_H)(\bar{x}_2 - 2\bar{x}).
 \end{aligned}$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum F_{iy} = 0 = F_{V1} + F - F_{Vr}$ am Knoten P_2 (Bild 26 c, rechts) folgt mit $F_V = F_H \cdot |y'|$ unter Beachtung, dass \bar{y}' negativ ist und somit $|y'| = -y'$,

$$\begin{aligned}
 F_H y_2/x_2 + q_I x_2/2 + F + F_H \bar{y}_2/\bar{x}_2 + q_{II} \bar{x}_2/2 &= 0, \quad \text{d. h.} \\
 F_H &= [-q_I x_2 - q_{II} \bar{x}_2 - 2F] / [2(y_2/x_2 + \bar{y}_2/\bar{x}_2)].
 \end{aligned}$$

Hiermit können f_I und f_{II} , wie angegeben, $F_V(x)$ und $F_S(x)$ nach Gl. (22) sowie L_I und L_{II} nach Gl. (23) berechnet werden.

B1.10 Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)

An einem Körper der Masse m wirken an den Massenelementen dm die Gewichtskräfte $dF_G = dm g$, die alle zueinander parallel sind. Den Angriffspunkt ihrer Resultierenden $F_G = \int dF_G$ nennt man den Schwerpunkt (Bild 27 a). Seine Lage ist festgelegt durch die Bedingung, dass das Moment der Resultierenden gleich dem der Einzelkräfte sein muss, d. h.

$$\begin{aligned}
 r_S \times F_G &= \int r \times dF_G \quad \text{bzw. mit} \quad dF_G = dF_G e \\
 (r_S F_G - \int r dF_G) \times e &= 0, \quad \text{d. h.} \\
 r_S &= \left(\int r dF_G \right) / F_G \quad \text{bzw. in Komponenten} \quad (24) \\
 x_S &= (1/F_G) \int x dF_G, & y_S &= (1/F_G) \int y dF_G, \\
 z_S &= (1/F_G) \int z dF_G.
 \end{aligned}$$

Analog gilt bei konstanter Fallbeschleunigung g für den Massenmittelpunkt, bei konstanter Dichte ρ für den Volumenschwerpunkt sowie für den Flächen- und Linienschwerpunkt in vektorieller Form

$$\begin{aligned}
 r_S &= (1/m) \int r dm; & r_S &= (1/V) \int r dV; \\
 r_S &= (1/A) \int r dA \quad \text{und} & & (25) \\
 r_S &= (1/s) \int r ds.
 \end{aligned}$$

Bestehen die Gebilde aus endlich vielen Teilen mit bekannten Teilschwerpunkten, so gilt in Komponenten z. B. für den Flächenschwerpunkt

$$\begin{aligned}
 x_S &= (1/A) \sum x_i A_i; \\
 y_S &= (1/A) \sum y_i A_i; & (26) \\
 z_S &= (1/A) \sum z_i A_i.
 \end{aligned}$$

Die Größen $\int x dA$ bzw. $\sum x_i A_i$ usw. bezeichnet man als statische Momente. Sind sie null, so folgt auch $x_S = 0$ usw., d. h., das statische Moment bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt (Schwerlinie) ist stets gleich null. Alle Symmetrieachsen erfüllen diese Bedingung, d. h., sie sind stets Schwerlinien.

Die durch Integration ermittelten Schwerpunkte von homogenen Körpern sowie von Flächen und Linien sind in den Tab. 1–3 angegeben.

Beispiel: Schwerpunkt eines Trägerquerschnitts. Für den zusammengesetzten Trägerquerschnitt ist der Flächenschwerpunkt zu ermitteln (Bild 27 b). – Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse. Ermittlung von y_S tabellarisch, wobei die Bohrung als negative Fläche angesetzt wird.

Fläche	A_i cm ²	y_i cm	$y_i A_i$ cm ³
1) U 300	58,8	38,30	2252,0
2) 2L 100 × 14	2 × 26,2	37,02	1939,8
3) □ 400 × 20	80,0	20,00	1600,0
4) 2L 150 × 100 × 14	2 × 33,2	4,97	330,0
5) Bohrung Ø25	-12,0	7,50	-90,0
	$\sum 245,6$		$\sum 6031,8$

$$y_S = 6031,8 \text{ cm}^3 / 245,6 \text{ cm}^2 = 24,56 \text{ cm}$$

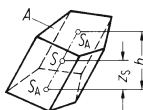
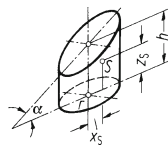
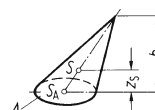
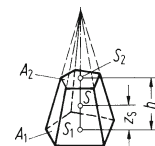
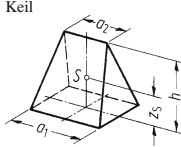
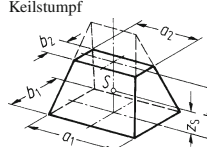
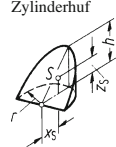
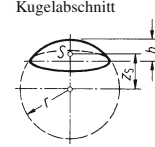
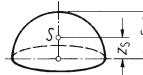
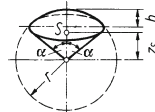
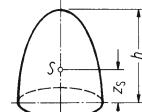
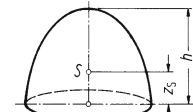
B1.11 Haftung und Reibung

Haftung. Bleibt ein Körper unter Einwirkung einer resultierenden Kraft F , die ihn gegen eine Unterlage presst, in Ruhe, so liegt Haftung vor (Bild 28). Die Verteilung der Flächenpressung zwischen Körper und Unterlage ist meist unbekannt und wird durch die Reaktionskraft F_n ersetzt. Aus Gleichgewichtsgründen ist $F_n = F_z = F \cos\alpha$ und $F_r = F_t = F \sin\alpha$, d. h. $F_r = F_n \tan\alpha$. Der Körper bleibt so lange in Ruhe, bis die Reaktionskraft F_r den Grenzwert $F_{r0} = F_n \tan\varrho_0 = F_n \mu_0$ erreicht, d. h. solange $F -$ räumlich betrachtet – innerhalb des sogenannten Reibungskegels mit dem Öffnungswinkel $2\varrho_0$ liegt. Für die Reaktionskraft F_r gilt die Ungleichung

$$F_r \leq F_n \tan\varrho_0 = F_n \mu_0. \quad (27)$$

Die Haftzahl μ_0 hängt ab von den aneinander gepressten Werkstoffen, deren Oberflächenbeschaffenheit, von einer

Tabelle 1. Schwerpunkte von homogenen Körpern

<p>Prisma, Zylinder (gerade oder schief)</p>  <p>$z_s = h/2$</p>	<p>abgeschrägter Kreiszyliner</p>  <p>$x_s = r^2 \tan \alpha / (4h)$ $z_s = h/2 + r^2 \tan^2 \alpha / (8h)$</p>	<p>Kegel, Pyramide (gerade oder schief)</p>  <p>$z_s = h/4$</p>	<p>Pyramiden- bzw. Kegelstumpf</p>  <p>$z_s = \frac{h}{4} \cdot \frac{A_1 + 2\sqrt{A_1 A_2} + 3A_2}{A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2}$ bzw. $z_s = \frac{h}{4} \cdot \frac{r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$</p>
<p>Keil</p>  <p>$z_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2a_1 + a_2}$</p>	<p>Keilstumpf</p>  <p>$z_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 3a_2 b_2}{2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2}$</p>	<p>Zylinderhuf</p>  <p>$x_s = 3\pi r/16$ $z_s = 3\pi h/32$</p>	<p>Kugelabschnitt</p>  <p>$z_s = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r-h)^2}{(3r-h)}$</p>
<p>Halbkugel</p>  <p>$z_s = 3r/8$ halbe Hohlkugel: $z_s = \frac{3}{8} \cdot \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1^3 - r_2^3}$</p>	<p>Kugelausschnitt</p>  <p>$z_s = 3r(1 + \cos \alpha) / 8$ $= 3(2r - h) / 8$</p>	<p>Rotationsparaboloid</p>  <p>$z_s = h/3$</p>	<p>Ellipsoid</p>  <p>$z_s = 3h/8$</p>

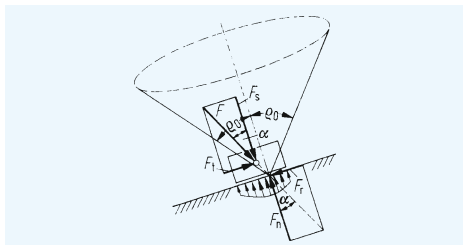


Bild 28. Haftung

Fremdschicht (Schmierschicht), von Temperatur und Feuchtigkeit, von der Flächenpressung und von der Größe der Normalkraft; μ_0 schwankt daher zwischen bestimmten Grenzen und ist gegebenenfalls experimentell zu bestimmen [3]. Insofern können die Werte für μ_0 (s. **Tab. 4**) nur als Anhaltswerte dienen.

Gleitreibung (Reibung der Bewegung). Wird die Haftung überwunden, und setzt sich der Körper in Bewegung, so gilt für die Reibkraft das Coulomb'sche Gleitreibungsgesetz (**Bild 29**)

$$F_r / F_n = \text{const} = \tan \varrho = \mu \quad \text{bzw.} \quad F_r = \mu F_n. \quad (28)$$

Die Gleitreibungskraft ist eine eingepärrte Kraft, die dem Geschwindigkeits- bzw. Verschiebungsvektor entgegengesetzt gerichtet ist. Der Gleitreibungskoeffizient μ (bzw. Gleitreibungswinkel ϱ) hängt neben den unter Haftung beschriebenen Einflüssen vornehmlich von den Schmierungsverhältnissen (Trockenreibung, Mischreibung, Flüssigkeitsreibung; s. **E5.1**)

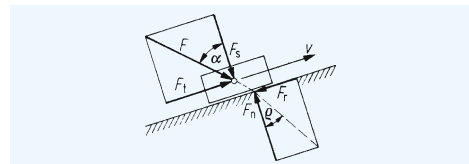


Bild 29. Gleitreibung

ab, zum Teil aber auch von der Gleitgeschwindigkeit [4, 5]. Anhaltswerte für μ s. **Tab. 4**.

B1.11.1 Anwendungen zur Haftung und Gleitreibung

Reibung am Keil. Gesucht wird die Kraft F , die zum Heben und Senken einer Last mit konstanter Geschwindigkeit erforderlich ist. Die Lösung folgt am einfachsten aus dem Sinussatz am Kräfteck, z. B. für das Heben der Last nach **Bild 30**

$$\frac{F_2}{F_Q} = \frac{\sin(90^\circ + \varrho_3)}{\sin[90^\circ - (\alpha + \varrho_2 + \varrho_3)]},$$

$$\frac{F}{F_2} = \frac{\sin(\alpha + \varrho_1 + \varrho_2)}{\sin(90^\circ - \varrho_1)};$$

hieraus

$$F = F_Q \frac{\tan(\alpha + \varrho_2) + \tan \varrho_1}{1 - \tan(\alpha + \varrho_2) \tan \varrho_3}. \quad \text{Entsprechend} \quad (29)$$

$$F = F_Q \frac{\tan(\alpha - \varrho_2) - \tan \varrho_1}{1 + \tan(\alpha - \varrho_2) \tan \varrho_3}$$

Tabelle 2. Schwerpunkte von Flächen

ebene Flächen			
<p>Dreieck</p> <p>$y_s = h/3$</p>	<p>Parallelogramm</p> <p>$y_s = h/2$</p>	<p>Trapez</p> <p>$y_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$</p>	<p>Kreisschnitt</p> <p>$y_s = 2r \sin \alpha / (3\alpha)$ $= 2r l / (3b)$ Halbkreisfläche: $y_s = 4r / (3\pi)$</p>
<p>Kreisabschnitt</p> <p>$y_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$ Halbkreisfläche: $y_s = 4r / (3\pi)$</p>	<p>Kreisringstück</p> <p>$y_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{(r_2^3 - r_1^3) \sin \alpha}{(r_2^2 - r_1^2)}$</p>	<p>Parabelflächen</p> <p>$x_{s1} = 3a/8$ $y_{s1} = 2h/5$ $x_{s2} = 3a/4$ $y_{s2} = 3h/10$</p>	<p>Parabelabschnitt</p> <p>$y_s = 2h/5$</p>
räumliche Oberflächen			
<p>Ellipsenabschnitt</p> <p>$y_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{b \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$</p>	<p>Kugelzone bzw. -haube</p> <p>$z_s = (r/2)(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) = h_0 + h/2$ bzw. $z_s = (r/2)(1 + \cos \alpha_2) = (h_0 + r)/2$</p>	<p>Mantel von Pyramide und Kegel</p> <p>$z_s = h/3$</p>	<p>Mantel von Kreiskegelstumpf</p> <p>$z_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{r_1 + 2r_2}{r_1 + r_2}$</p>

Tabelle 3. Schwerpunkte von Linien

<p>Dreieckumfang</p> <p>$y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c}$</p>	<p>Kreisbogen</p> <p>$y_s = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} = \frac{r l}{b}$ Halbkreisbogen: $y_s = 2r/\pi$</p>	<p>beliebiger flacher Bogen</p> <p>$y_s \approx 2h/3$</p>
--	---	--

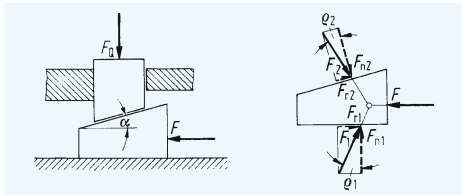


Bild 30. Reibung am Keil

für das Senken der Last. Wird $F \leq 0$, so tritt Selbsthemmung auf; dann ist

$$\tan(\alpha - \varrho_2) \leq \tan \varrho_1 \quad \text{bzw.} \quad \alpha \leq \varrho_1 + \varrho_2.$$

Der Keil muss dann herausgezogen bzw. von der anderen Seite hinausgedrückt werden. Der Wirkungsgrad des Keilgetriebes beim Heben der Last ist $\eta = F_0/F$; hierbei ist $F_0 = F_Q \cdot \tan \alpha$ die erforderliche Kraft ohne Reibung.

Für $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$ gilt $F = F_Q \tan(\alpha \pm 2\varrho)$; Selbsthemmung für $\alpha \leq 2\varrho$, Wirkungsgrad $\eta = \tan \alpha / \tan(\alpha + 2\varrho)$. Bei Selbsthemmung wird $\eta = \tan 2\varrho / \tan 4\varrho = 0,5 - 0,5 \tan^2 2\varrho < 0,5$.

Schraube (Bewegungsschraube) Rechteckgewinde (flachgängige Schraube).

(Bild 31 a) Gesucht ist das Drehmoment M zum gleichförmigen Heben und Senken der Last.

$$\sum F_{iz} = 0 = \int dF \cos(\alpha + \varrho) - F_Q,$$

$$F = F_Q / \cos(\alpha + \varrho),$$

Tabelle 4. Haft- und Gleitreibungswerte

Stoffpaar	Haftzahl μ_0		Gleitreibungszahl μ	
	trocken	geschmiert	trocken	geschmiert
Eisen-Eisen			1,0	
Kupfer-Kupfer			0,60...1,0	
Stahl-Stahl	0,45...0,80	0,10	0,40...0,70	0,10
Chrom-Chrom			0,41	
Nickel-Nickel			0,39...0,70	
Aluminiumlegierung-Aluminiumlegierung			0,15...0,60	
S 235 poliert			0,15	
Stahl-Grauguss	0,18...0,24	0,10	0,17...0,24	0,02...0,21
Stahl-Weißmetall			0,21	
Stahl-Blei			0,50	
Stahl-Zinn			0,60	
Stahl-Kupfer			0,23...0,29	
Bremsbelag-Stahl			0,50...0,60 0,20...0,50	
Lederdichtung-Metall	0,60	0,20	0,20...0,25	0,12
Stahl-Polytetrafluoräthylen (PTFE)			0,04...0,22	
Stahl-Polyamid			0,32...0,45 0,10	
Holz-Metall	0,50...0,65	0,10	0,20...0,50	0,02...0,10
Holz-Holz	0,40...0,65	0,10...0,20	0,20...0,40	0,04...0,16
Stahl-Eis	0,027		0,014	

$$\sum M_{iz} = 0 = M - \int dF \sin(\alpha + \varrho) r_m, \\ M = F_Q r_m \tan(\alpha + \varrho)$$

Wirkungsgrad beim Heben $\eta = M_0/M = \tan\alpha/\tan(\alpha + \varrho)$; M_0 erforderliches Moment ohne Reibung. Beim Senken tritt $-\varrho$ an Stelle von ϱ ; $M = F_Q r_m \tan(\alpha - \varrho)$. Selbsthemmung für $M \leq 0$, d. h. $\tan(\alpha - \varrho) \leq 0$, also $\alpha \leq \varrho$. Dann ist zum Senken der Last ein negatives Moment erforderlich. Für $\alpha = \varrho$ folgt $\eta = \tan\varrho/\tan 2\varrho = 0,5 - 0,5 \tan^2 \varrho < 0,5$.

Trapez- und Dreieckgewinde (scharfgängige Schraube) (Bild 31 b). Es gelten dieselben Gleichungen wie für Rechteckgewinde, wenn anstelle von $\mu = \tan\varrho$ die Reibzahl $\mu' = \tan\varrho' = \mu/\cos(\beta/2)$, d. h. anstelle von ϱ der Reibwinkel $\varrho' = \arctan[\mu/\cos(\beta/2)]$ eingesetzt wird. Beweise gemäß Bild 31 b, da anstelle von dF_n die Kraft

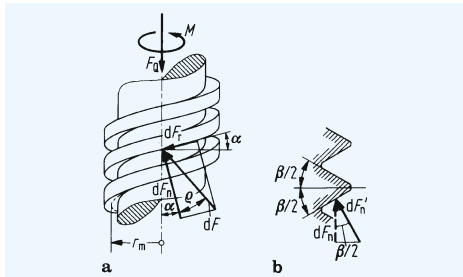


Bild 31. Reibung an a flachgängiger und b scharfgängiger Schraube

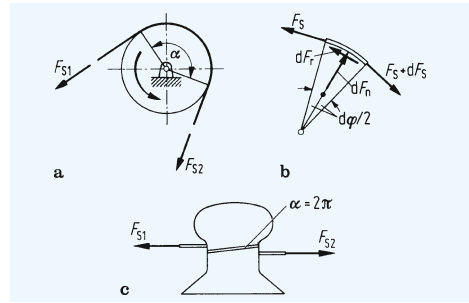


Bild 32. Seilreibung. a Kräfte; b Element; c Schiffspoller

$dF'_n = dF_n/\cos(\beta/2)$ und anstelle von $dF_r = \mu dF_n$ die Kraft $dF'_r = \mu dF'_n = [\mu/\cos(\beta/2)]dF_n = \mu' dF_n$ tritt. Hierbei ist β der Flankenwinkel des Gewindes. Bemerkung: Für Befestigungsschrauben ist Selbsthemmung, d. h. $\alpha \leq \varrho'_0$, erforderlich.

Seilreibung (Haftung zwischen Seil und Seilrolle) (Bild 32).

Gleitreibung tritt auf bei relativer Bewegung zwischen Seil und Scheibe (Bandbremse, Schiffspoller bei laufendem Seil). Bei Haftung zwischen Seil und Scheibe (Riemtrieb, Bandbremse als Haltebremse, Schiffspoller bei ruhendem Seil) tritt Gleichgewicht in Normal- und Tangentialrichtung am Seilelement auf. Damit ergibt sich $dF_n = F_S d\varphi$, $dF_S = dF_r$; mit $dF_r = \mu_0 dF_n$ folgt $dF_S = \mu_0 F_S d\varphi$. Nach Integration über den Umschlingungswinkel α folgt die Euler'sche Seilreibungsformel: $F_{S2} = F_{S1} e^{\mu_0 \alpha}$ bzw. $F_{S2}/F_{S1} = e^{\mu_0 \alpha}$. Die Haftkraft ergibt sich aus $F_r = F_{S2} - F_{S1}$ und das Haftmoment aus $M_r = F_r r$. Bei nicht vernachlässigbarer Geschwindigkeit des Seiles (z. B. beim Riemtrieb) treten Fliehkräfte $q_f = mv^2/r$ (m : Masse pro Längeneinheit des Seiles) am Seil auf. Dann ist F_S durch $F_S - mv^2$ zu ersetzen. Beim Schiffspoller (Bild 32 c) mit $\alpha = 2\pi$ und $\mu_0 = 0,1$ ergibt sich ein Verhältnis $F_{S2}/F_{S1} \approx 1,87$.

B1.11.2 Rollwiderstand

Rollt ein zylindrischer o.ä. Körper auf einer Unterlage (Bild 33 a), so ergibt sich wegen der Verformung der Unterlage und des Körpers eine schräg gerichtete Resultierende, deren Horizontalkomponente die Widerstandskraft F_w ist. Ihr muss bei gleichförmiger Bewegung die Antriebskraft F_a das Gleichgewicht halten. Mit $F_n = F_Q$ und $f \ll r$, d. h. $\tan\alpha \approx \sin\alpha = f/r$, folgt

$$F_w = F_Q f/r = F_Q \mu_r$$

und als sog. Moment der rollenden Reibung $M_w = F_w r = \mu_r F_Q r = F_Q f$, wobei $\mu_r = f/r$ der Koeffizient der Rollreibung ist. Der Hebelarm f der Rollreibung ist empirisch zu ermitteln. Für Stahlräder auf Schienen ist $f \approx 0,05$ cm, für Wälzlager $f \approx 0,0005...0,001$ cm.

Als **Fahrwiderstand (Bild 33 b)** bezeichnet man die Summe aus Rollwiderstand und Lagerreibungswiderstand,

$$F_{w, ges} = (F_Q + F_G) f/r + F_Q \mu_z r_1/r$$

F_G Gewichtskraft des Rads, μ_z Zapfeneibungszahl.

B1.11.3 Widerstand an Seilrollen

Infolge Biegesteifigkeit der Seile erfolgt an der Auflaufstelle ein „Abheben“ um a_2 (s. Bild 33 c) und an der Ablaufstelle ein „Anschmiegen“ um a_1 . Unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Lagerreibung folgt bei gleichmäßiger Geschwindigkeit für die **Feste Rolle (Bild 33 c)**: Beim Heben

$$\sum M_A = 0 = F(r - a_1) - F_Q(r + a_2) - (F + F_Q)r_z, \text{ d. h.}$$

$$F = F_Q(r + a_2 + r_z)/(r - a_1 - r_z) = F_Q/\eta.$$

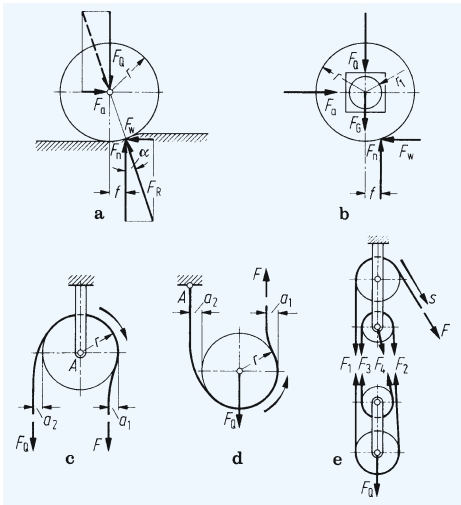


Bild 33. Widerstände. **a** Rollwiderstand; **b** Fahrwiderstand; **c** feste und **d** lose Seilrolle; **e** Flaschenzug

η ist der Wirkungsgrad der festen Rolle beim Heben ($\eta \approx 0,95$). Beim Senken ist η durch $1/\eta$ zu ersetzen. (r_2 Radius der Zapfenreibung.)

Lose Rolle. (**Bild 33 d**): Beim Heben

$$\sum M_A = 0 = F(2r + a_2 - a_1) - F_Q(r + a_2 + r_2)$$

d. h.

$$F = (F_Q/2)(r + a_2 + r_2)/(r + a_2/2 - a_1/2) = (F_Q/2)/\eta.$$

$\eta = \text{Nutzarbeit/zugeführte Arbeit} = (F_Q s/2)/(F s)$. Näherungsweise wird ebenfalls $\eta \approx 0,95$ gesetzt. Beim Senken ist η durch $1/\eta$ zu ersetzen.

Rollenzug. (**Bild 33 e**): Mit den Ergebnissen für die feste und die lose Rolle ist $F_1 = \eta F$, $F_2 = \eta F_1 = \eta^2 F$ usw. Gleichgewicht für die freigemachte untere Flasche führt zu

$$\sum F_y = 0 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - F_Q, \text{ d. h.}$$

$$F(\eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4) = F_Q. \text{ Mit}$$

$$1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 = (1 - \eta^4)/(1 - \eta) \text{ folgt}$$

$$F = F_Q / [\eta(1 - \eta^4)/(1 - \eta)].$$

Bei n tragenden Seilsträngen werden die Kraft und der Gesamtwirkungsgrad für das Heben

$$F = F_Q / [\eta(1 - \eta^n)/(1 - \eta)] \text{ und}$$

$$\eta_{\text{ges}} = W_n / W_z = (F_Q s/n)/(F s) = \eta(1 - \eta^n)/[(1 - \eta)n].$$

Beim Senken ist η wieder durch $1/\eta$ zu ersetzen.

Literatur

Spezielle Literatur

[1] Föppl, A.: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. I, 14. Aufl., Bd. II, 10. Aufl. R. Oldenbourg, München, Berlin (1948, 1949) – [2] Schlink, W.: Technische Statik, 4. u. 5. Aufl. Springer, Berlin (1948) – [3] Drescher, H.: Die Mechanik der Reibung zwischen festen Körpern. VDI-Z. **101**, 697–707 (1959) – [4] Krause, H., Poll, G.: Mechanik der Festkörperreibung. VDI, Düsseldorf (1982) – [5] Kragelski, Dobyčín, Komalov: Grundlagen der Berechnung von Reibung und Verschleiß. Hanser, München (1986)